Elemente der Variationsrechnung

Abschlussklausur

16.07.02

1. Betrachte das Variationsintegral

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$$

mit Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(1) = 1$.

(a) Zeige, dass $u(x) = x$ die eindeutige Lösung der Eulergleichung ist.

(b) Zeige, dass $u(x) = x$ die hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen schwachen Minimums erfüllt.

(3+3 Punkte)

2. Sei $L(t, q, v) = t\, v^2$.

(a) Zeige: das Wirkungsintegral

$$\mathcal{W}_s(Q) = \int_{T_1}^{T_2} L(T, Q, \frac{dQ}{dT})\, dT$$

ist *nicht* invariant unter der Zeittranslation

$$(t, q) \mapsto (T, Q) = (t + s, q)\,.$$

(b) Zeige: $\mathcal{W}_s$ ist invariant unter der Raumtranslation

$$(t, q) \mapsto (T, Q) = (t, q + s)\,.$$

Wie lautet das zugehörige erste Integral nach dem Satz von Noether?

(2+4 Punkte)

3. Hinweis: Die Teile der folgenden Aufgabe können weitgehend unabhängig voneinander bearbeitet werden.

   (a) Das Wirkungsintegral

   $$\mathcal{W}_s(Q) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, Q, \frac{dQ}{dt})\, dt$$

   sei invariant unter der Ortstransformation

   $$q \mapsto Q = Q(q, s)$$

   und der infinitesimale Generator dieser Symmetrie sei bezeichet mit

   $$\eta(q) = \left.\frac{dQ}{ds}\right|_{s=0} .$$

   Beweise den Satz von Noether für diesen Fall.

   (b) Modifiziere den Beweis des Satzes von Noether so, dass nicht partiell integriert wird. Schließe auf diese Weise, dass

   $$L_q(t, q, \dot{q})\, \eta(q) + L_v(t, q, \dot{q})\, \eta'(q)\, \dot{q} = 0 .$$

   (c) Sei im Weiteren $L(t, q, v) = t\, e^q\, v^2$. Verwende das Ergebnis aus Teil (b), um zu zeigen, dass der infinitesimale Generator einer reinen Ortstransformation

   $$\eta(q) = e^{-q/2}$$

   lauten muss.

   (d) Schließe mit dem Satz von Noether und Teil (c), dass ein erstes Integral gegeben ist durch

   $$t\, e^{q/2}\, \dot{q} = c .$$

   (e) Zeige schließlich durch Integration des Ergebnisses von (d), dass die allgemeine Lösung der Euler–Lagrange-Gleichung lautet

   $$q(t) = 2\, \ln\left(\frac{c\, \ln t - b}{2}\right) ,$$

   wobei die Konstanten b und c durch Anfangs- oder Randbedingungen zu bestimmen sind.

(2+3+3+2+2 Punkte)

4. In Transportproblemen der Kontinuumsmechanik gibt es zwei Geschwindigkeitsfelder[1] $\dot{q} = \dot{q}(x,t)$ und $u = u(x,t)$, die über

$$\dot{q}(x,t) = u(q(x,t),t)$$

zusammen hängen. (Wir schreiben $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}$ und nehmen an, dass für festes t die Abbildung $q(\,\cdot\,,t)$ ein Diffeomorphismus ist.)

Genauso kann man neben δq eine zweite Variation $w = x(x,t)$ dadurch definieren, dass

$$\delta q(x,t) = w(q(x,t),t)\,. \tag{*}$$

(a) Zeige, dass
$$\delta u = \dot{w} + u\,\frac{\partial w}{\partial x} - w\,\frac{\partial u}{\partial x}\,.$$

(b) Zeige mit (a), dass die Euler–Lagrange-Gleichungen zum Wirkungsintegral
$$\mathcal{W}(u) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)^2\,dx\,dt$$
bezüglich Variationen der Form (*), die in t_1 und t_2 verschwinden, folgenderweise lauten:
$$\dot{u} + 3\,u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,.$$
(Man darf dabei annehmen, dass $u(x,t)$ für $x \to \pm\infty$ verschwindet.)

(3+3 Punkte)

[1] Zur Erläuterung, aber für die Aufgabe nicht direkt relevant: Die sogenannte Lagrange'sche Geschwindigkeit $\dot{q}$ ist die Geschwindigkeit eines Teilchens, dass man in seiner Bewegung verfolgt. Es entspricht also dem Geschwindigkeitsbegriff der Teilchenmechanik. Die sogenannte Euler'sche Geschwindigkeit u hingegen ist die Geschwindigkeit, die ein stationär verankerter Beobachter misst, an dem kontinuierlich (immer neue) Teilchen vorbeiströmen.