Elemente der Variationsrechnung

Probeklausur

12.06.02

1. Betrachte das Variationsintegral

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'^2 + u'^3)\, dx$$

mit Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(1) = 1$.

(a) Zeige, dass $u(x) = x$ die eindeutige PC^1-Lösung der Eulergleichung ist.

(b) Zeige, dass $u(x) = x$ die hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen schwachen Minimums erfüllt.

(2+2 Punkte)

2. Betrachte das Variationsintegral

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-1}^2 u'\,(1 + x^2\, u')\, dx$$

mit Randbedingungen $u(-1) = 1$ und $u(2) = 1$.

(a) Zeige, dass $u(x) = 1$ die eindeutige PC^1-Lösung der Eulergleichung ist.

(b) Zeige, dass die hinreichende Bedingung für die Existenz eines lokalen schwachen Minimums *nicht* erfüllt ist.

(c) Zeige, dass $u(x) = 1$ trotzdem ein starkes lokales Minimum des Variationsproblems ist.
Hinweis: Berechne $\mathcal{F}(u + \varepsilon\varphi) - \mathcal{F}(u)$.

(1+1+2 Punkte)

3. Betrachte das Variationsintegral

$$\mathcal{F}(u) = \int_\alpha^\beta \bigl(\tfrac{1}{2}\, u''(x)^2 + \tfrac{1}{2}\, u(x)^2 + f(x)\, u(x)\bigr)\, dx$$

für gegebenes $f \in C[\alpha, \beta]$ auf der Variationsklasse

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathrm{PC}^2[0,1] \colon v(\alpha) = a, v(\beta) = b\}.$$

Wie lautet die Eulergleichung, und wie lauten die Randbedingungen für die Eulergleichung?

(Vorsicht: Wie viele Randbedingungen braucht man für diese Eulergleichung?)

(4 Punkte)

4. Betrachte die Poissongleichung

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ ist.

(a) Schreibe die Poissongleichung als Eulergleichung eines Variationsproblems.

(b) Skizziere den Beweis folgender Aussage: Falls $f \in C(\overline{\Omega})$ und u eine $C^1(\overline{\Omega})$-Lösung der Poissongleichung ist, so gilt schon $u \in C^2(\Omega)$.

Hinweis: Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich, da sich die Lösung durch zweifache Integration berechnen lässt. In dieser Aufgabe geht es darum, die Beweisstrategie für den allgemeinen Fall mit Hilfsmitteln aus der Variationsrechnung zu formulieren, auch wenn der benötigte Satz in der Vorlesung nicht für den Fall $n > 1$ bewiesen wurde. Wie müsste dieser Satz im Allgemeinen lauten?

(2+2 Punkte)