Elemente der Variationsrechnung

Übungsblatt 1

23.04.2002

1. Lagrange–Multiplikatoren im $\mathbb{R}^n$ (zur Wiederholung):
   Bestimmen Sie, welcher Punkt der Ellipse
   $$x^2 + 4\,y^2 = 4$$
   dem Punkt $(1,0)$ am nächsten liegt.

2. Fischer/Kaul, Beipiel 1.5 (c): Betrachten Sie das Funktional
   $$\mathcal{F}(v) = \int_0^1 \left(v'(x)^2 - 1\right)^2 dx$$
   auf der Variationsklasse
   $$\mathcal{V} = \{v \in \mathrm{PC}^1[0,1] \colon v(0) = v(1) = 0\}.$$
   (a) Stellen Sie die Euler–Gleichung auf und lösen Sie diese.
   (b) Zeigen Sie, dass die Lösung der Euler–Gleichung ein schwaches, aber kein starkes Maximum ist.

3. Ein in Höhe $y = y(x)$ fliegendes Flugzeug hat einen Treibstoffverbrauch pro Bogenlängeneinheit geflogener Wegstrecke von $\exp(-y/H)$, wobei H eine vorgegebene Konstante ist. Welche Flugkurve verbindet zwei auf Höhe 0 liegende Orte, die eine horizontale Distanz L auseinanderliegen, mit minimalem Treibstoffverbrauch?

Abgabe: Am 30.4. in der Vorlesung.