Elemente der Variationsrechnung

Übungsblatt 7

25.06.2002

1. Sei $L(t,q,v) = \frac{1}{2}\, t\,(v^2 - \frac{1}{3}\, q^6)$.

   (a) Zeige, dass das Wirkungsintegral invariant ist bezüglich der Einparameterfamilie von Transformationen
   $$\boldsymbol{h}_s \colon (t,q) \mapsto \big((1+s)t, (1+s)^{-1/2} q\big)\,.$$

   (b) Verwende das Noether–Theorem, um das folgende erste Integral zu finden:
   $$\tfrac{1}{6}\, t^3\, q^6 + \tfrac{1}{2}\, t^3\, v^2 + \tfrac{1}{2}\, t^2\, qv = C\,.$$

2. Zeige, dass die Hamilton'sche Formulierung des Noether–Theorems für Raum-Zeit-Symmetrien lautet
   $$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\eta}(t,\boldsymbol{q}) - H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\,\xi(t,\boldsymbol{q}) = C\,,$$
   wobei $\boldsymbol{\eta}$ und ξ die infinitesimalen Generatoren der Symmetriegruppe in Raum bzw. Zeitrichtung sind.

Abgabe: Am 2.7. in der Vorlesung.