Nils Gehlenborg (*neil@mangojelly.org*)

Numerik: Übungsblatt 5

1. Das Relaxationsverfahren $\mathbf{x_{k+1}} = \mathbf{x_k} + B(\mathbf{b} - A\mathbf{x_k})$ ist konsistent[1], denn für $\mathbf{x_k} = \mathbf{x_f}$ ($\mathbf{x_f}$ ist ein Fixpunkt der Iteration), gilt $\mathbf{x_f} = \mathbf{x_f} + B(\mathbf{b} - A\mathbf{x_f}) \Leftrightarrow \mathbf{0} = B(\mathbf{b} - A\mathbf{x_f})$, und da B nicht singulär ist, hat das Gleichungssystem $\mathbf{0} = B(\mathbf{b} - A\mathbf{x_f})$ die eindeutige Lösung $\mathbf{b} - A\mathbf{x_f} = \mathbf{0}$, aus der folgt, daß der Fixpunkt $\mathbf{x_f}$ eine Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist. ■

2. Wenn es N Seiten im World Wide Web gibt, dann hat die $N \times N$ Google-Matrix $G = (g_{ij})$ die Form

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \frac{-d}{n_k} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{-d}{n_k} & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die transponierte Google-Matrix $G^T = (g_{ji})$ ist demnach von der Form

$$G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{-d}{n_k} & \dots & 0 & \frac{-d}{n_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

G^T enthält also in der k-ten Zeile die Links, die von der k-ten Seite auf andere Seiten linken[2]. Die Anzahl der Links auf der k-ten Seite ist n_k, so daß in der k-ten Zeile von G^T neben der Eins auf der Diagonalen und $N - n_k - 1$ Nullen genau n_k Einträge der Form $\frac{-d}{n_k}$ stehen. Daraus folgt, daß G^T *stark diagonal dominant* ist, denn für jede Zeile der Matrix G^T gilt

$$\begin{aligned} |g_{kk}| &> \sum_{l=1}^{N} |g_{kl}| \\ \Leftrightarrow 1 &> \sum_{l=1}^{n_k} \left|\frac{-d}{n_k}\right| + \sum_{m=n_k+1}^{N-1} 0 \\ \Leftrightarrow 1 &> n_k \left|\frac{-d}{n_k}\right| + 0 \\ \Leftrightarrow 1 &> |-d| \\ \Leftrightarrow 1 &> d \end{aligned}$$

wegen $d \in (0, 1)$. ■

[1] Konsistent bedeutet, daß jeder Fixpunkt der Iteration schon eine Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist.

[2] In der k-ten Zeile und der l-ten Spalte steht der Anteil vom Rang der k-ten Seite, der an die l-te Seite weitergegeben wird, nämlich $\frac{-d}{n_k}$.

Damit ist der *Spektralradius* von G^T kleiner als 1, woraus folgt, daß der größte Eigenwert von G^T kleiner als 1 ist. Da die Eigenwerte von G^T gleich den Eigenwerten von G sind, ist der Spektralradius von G ebenfalls kleiner 1. Das ist ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz der Google-Iteration.

3. (Siehe Programm `gauss_seidel.m` im Anhang.)