Übungsgruppe Roland Eikemper, Mittwoch 13.15 Uhr - 14.00 Uhr, Raum H41/S8

Nils Gehlenborg (*neil@mangojelly.org*)

Numerik: Übungsblatt 7

1. (a) Um das Interpolationspolynom 2. Grades für die angegebenen Stützstellen aufstellen zu können, müssen im ersten Schritt die Basispolynome l_i $(i = 0, 1, 2)$ und die dazugehörigen Stützkoeffizienten λ_i berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
l_0 &= \lambda_0(x - x_1)(x - x_2) \\
&= \lambda_0(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) \text{ mit} \qquad (1) \\
\lambda_0 &= \frac{1}{(x_0^2 - x_0(x_1 + x_2) + x_1x_2)} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \lambda_1(x - x_0)(x - x_2) \\
&= \lambda_1(x^2 - x(x_0 + x_2) + x_0x_2) \text{ mit} \qquad (3) \\
\lambda_1 &= \frac{1}{(x_1^2 - x_1(x_0 + x_2) + x_0x_2)} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_2 &= \lambda_2(x - x_0)(x - x_1) \\
&= \lambda_2(x^2 - x(x_0 + x_1) + x_0x_1) \text{ mit} \qquad (5) \\
\lambda_2 &= \frac{1}{(x_2^2 - x_2(x_0 + x_1) + x_0x_1)} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Es ist anzumerken, daß die Stützkoeffizienten Konstanten sind. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden sie in den folgenden Schritten nicht in ihrer expliziten Form verwendet.
Mit (1) – (6) ergibt sich für das Interpolationspolynom

$$
\begin{aligned}
p_2(x) = y_0\lambda_0(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) &+ \\
y_1\lambda_1(x^2 - x(x_0 + x_2) + x_0x_2) &+ \\
y_2\lambda_2(x^2 - x(x_0 + x_1) + x_0x_1)&. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

(b) Aus (7) läßt sich die erste Ableitung von $p_2(x)$ gewinnen, sie lautet

$$
\begin{aligned}
p_2'(x) = y_0\lambda_0(2x - x_1 - x_2) &+ \\
y_1\lambda_1(2x - x_0 - x_2) &+ \\
y_2\lambda_2(2x - x_0 - x_1)&. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Um aus (8) eine Näherungsformel für $f'(x_0)$ herzuleiten, berechnet man $p_2'(x_0)$ und erhält

$$
\begin{aligned}
p_2'(x_0) &= y_0\lambda_0(2x_0 - x_1 - x_2) + y_1\lambda_1(x_0 - x_2) + y_2\lambda_2(x_0 - x_1) \\
&= y_0\lambda_0(x_0 - x_1) + y_0\lambda_0(x_0 - x_2) + y_1\lambda_1(x_0 - x_2) + y_2\lambda_2(x_0 - x_1) \\
&= (x_0 - x_1)(y_0\lambda_0 + y_2\lambda_2) + (x_0 - x_2)(y_0\lambda_0 + y_1\lambda_1).
\end{aligned}
$$

Ob das Einsetzen der λ_i in dieser allgemeinen Form Sinn macht, ist fraglich. Denn die Übersichtlichkeit würde verloren gehen und außerdem könnte sich die Berechnung von $p_2'(x_0)$ mit konkreten Werten unter Umständen sogar verkomplizieren.

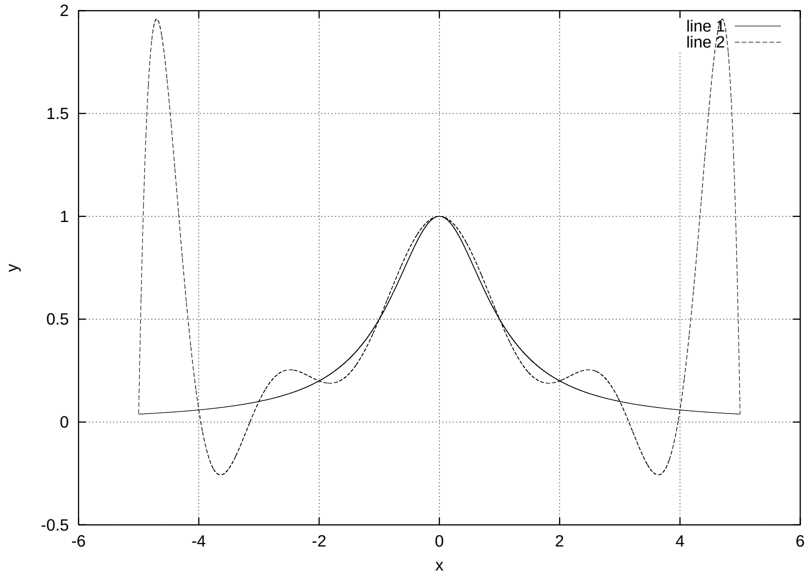

Abbildung 1: `line 1`: $f(x)$, `line 2`: $p_{10}(x)$

2. (Siehe Programm `standard_pip.m` im Anhang.) Das Octave-Programm `standard_pip.m` liefert die in Abbildung 1 dargestellten Graphen für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und für das entsprechende Interpolationspolynom $p_{10}(x)$ bezüglich der äquidistanten Stützstellen $x_i = -5, -4, \ldots, 5$.

   In Abbildung 1 sind an den Rändern des Intervalls deutlich die für die Polynominterpolation typischen Überschwinger zu erkennen.

3. (Siehe Programm `tschebyscheff_pip.m` im Anhang.) Verwendet man statt äquidistanter Stützstellen die sogenannten Tschebyscheff-Knoten, so ergibt sich für das Interpolationspolynom der in Abbildung 2 gezeigte Graph.

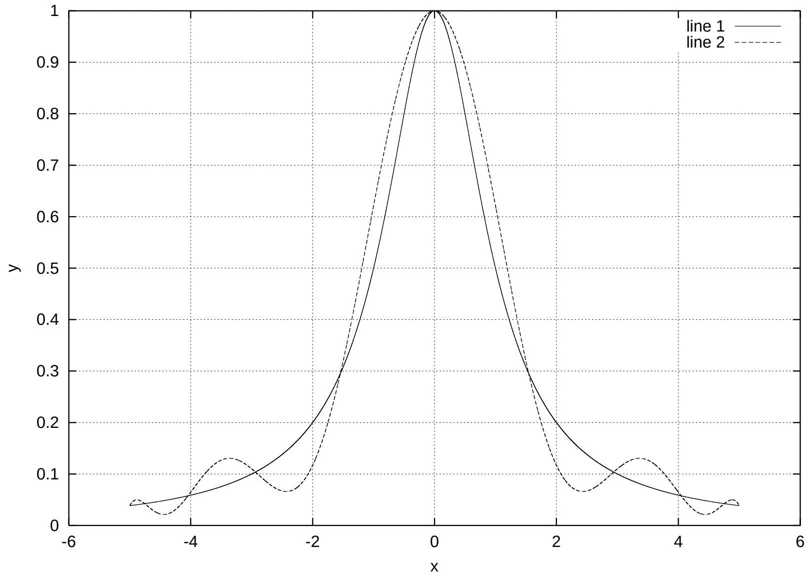

Abbildung 2: `line 1`: $f(x)$, `line 2`: $p_{10}(x)$

Die in Abbildung 1 auffallenden Überschwinger an den Rändern des Intervalls sind bei Verwendung der Tschebyscheff-Knoten stark reduziert, so daß das Interpolationspolynom $p_{10}(x)$ sehr viel besser an die Kurve angenähert ist, als im vorangegangenen Fall.