Übungsgruppe Roland Eikemper, Mittwoch 13.15 Uhr - 14.00 Uhr, Raum H41/S8

Nils Gehlenborg (*neil@mangojelly.org*)

Numerik: Übungsblatt 9

1. Siehe Anlage.
2. Bestimmung der Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3. \end{aligned}$$

Aus $\dot{x} = y$ folgt, daß die Ordinate aller Fixpunkte $y = 0$ ist. $x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^2) = 0$ liefert die Abszissen $x = 0$, $x = 1$ und $x = -1$. Damit gibt es drei Fixpunkte $(0, 0)$, $(-1, 0)$ und $(1, 0)$. Die Jacobi-Matrix für diese Differentialgleichung ist

$$Df = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Untersuchung der Stabilität des Fixpunkts $(0, 0)$ bestimmt man die Jacobi-Matrix an diesem Punkt

$$Df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

aus der folgt

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Die Eigenwerte von $Df_{(0,0)}$ werden also bestimmt durch

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \pm 1. \end{aligned}$$

Da $Df_{(0,0)}$ einen negativen und einen positiven reellen Eigenwert hat, ist der Fixpunkt $(0, 0)$ instabil. Zur Untersuchung der Stabilität der Fixpunkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ bestimmt man die Jacobi-Matrix an diesen Punkten

$$Df_{(-1,0)} = Df_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

aus der folgt

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2.$$

Die Eigenwerte von $Df_{(-1,0)} = Df_{(1,0)}$ werden also bestimmt durch

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= -2 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \pm i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Da $Df_{(-1,0)} = Df_{(1,0)}$ einen negativen und einen positiven imaginären Eigenwert hat, sind die Fixpunkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ neutral stabil.

3. (Siehe Programm `explicit_euler.m` im Anhang.) Das Octave-Programm `explicit_euler.m` plottet die Lösung des harmonischen Oszillators für verschiedene Δt. Abbildung 1 zeigt Lösungen für unterschiedliche Δt.

Abbildung 1: `line 1`: $\Delta t = 0.001$, `line 2`: $\Delta t = 0.01$ und `line 3`: $\Delta t = 0.1$ (t_{max} jeweils 100)

Es ist deutlich zu erkennen, daß für kleinere Δt der Fehler geringer wird. Offensichtlich ist der Fehler jedoch in allen Fällen zu groß, so daß es sich bei den Trajektorien nie um geschlossene Ellipsen handelt, wie die Stabilitätsuntersuchung der Fixpunkte des harmonischen Oszillators liefert (siehe Vorlesung).