УДК 512.816.2, 512.816.4, 512.818

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ОРБИТ В ИНД-МНОГООБРАЗИЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ФЛАГОВ

Иван Пенков и Лука Фресс

Посвящается Эрнесту Борисовичу Винбергу к восьмидесятилетию

Аннотация. Мы распространяем двойственность Мацуки на произвольные инд-многообразия максимальных обобщённых флагов, другими словами, на любое однородное инд-многообразие $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ для классической инд-группы $\mathbf{G}$ и расщепляющей Борелевской инд-подгруппы $\mathbf{B} \subset \mathbf{G}$. Сначала мы приводим явную комбинаторную версию двойственности Мацуки в конечномерном случае, включающую явную параметризацию K- и G^0-орбит на G/B. После того, как мы доказываем двойственность Мацуки в бесконечномерном случае, мы даём необходимые и достаточные условия на Борелевскую инд-подгруппу $\mathbf{B} \subset \mathbf{G}$ для существования открытых и замкнутых $\mathbf{K}$- и $\mathbf{G}^0$-орбит на $\mathbf{G}/\mathbf{B}$, где $(\mathbf{K}, \mathbf{G}^0)$ — согласованная пара, состоящая из симметрической инд-подгруппы $\mathbf{K}$ и вещественной формы $\mathbf{G}^0$ инд-группы $\mathbf{G}$.

1. Введение

В настоящей статье мы распространяем двойственность Мацуки на инд-многообразия максимальных обобщённых флагов, то есть, на однородные пространства вида $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ для $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(\infty)$, $\mathrm{SL}(\infty)$, $\mathrm{SO}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$. В случае конечномерной редуктивной алгебраической группы G, двойственность Мацуки [6, 11, 12] это биекция между (конечным) множеством K-орбит на G/B и множеством G^0-орбит на G/B, где K является симметрической подгруппой G и G^0 является вещественной формой G. Более того, эта биекция обращает отношения включения на замыканиях орбит. В частности, замечательная теорема об единственности замкнутой G^0-орбиты на G/B, см. [19], следует через двойственность Мацуки из единственности открытой (по Зарисскому) K-орбиты на G/B. В монографии [7] двойственность Мацуки была использована в качестве отправной точки для изучения пространств циклов.

Если $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(\infty)$, $\mathrm{SL}(\infty)$, $\mathrm{SO}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$ — классическая инд-группа, то её Борелевские инд-подгруппы не являются ни $\mathbf{G}$-сопряжёнными, ни $\mathrm{Aut}(\mathbf{G})$-сопряжёнными, поэтому существет много инд-многообразий вида $\mathbf{G}/\mathbf{B}$. Мы показываем, что двойственность Мацуки продолжается на произвольное инд-многообразие $\mathbf{G}/\mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — расщепляющая Борелевская инд-подгруппа инд-группы $\mathbf{G}$, а $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(\infty)$, $\mathrm{SL}(\infty)$, $\mathrm{SO}(\infty)$, $\mathrm{Sp}(\infty)$. В бесконечномерном случае структура $\mathbf{G}^0$-орбит и $\mathbf{K}$-орбит на $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ сложнее, чем в конечномерном случае, и всегда существует бесконечно много орбит.

Изучение $\mathbf{G}^0$-орбит на $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ для $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(\infty), \mathrm{SL}(\infty)$ было начато в работе [9] и продолжено в работе [20]. В частности, в статье [9] было показано, что

[0]Ключевые слова. Классические инд-группы, обобщённые флаги, симметрические пары, вещественные формы, Двойственность Мацуки.

для некоторых веществнных форм $\mathbf{G}^0$ существуют расщепляющие Борелевские инд-подгруппы $\mathbf{B} \subset \mathbf{G}$ такие, что $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ не имеет ни открытых, ни замкнутых $\mathbf{G}^0$-орбит. Нам не известно о каких-либо предшествующих исследованиях $\mathbf{K}$-орбит на $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ для $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(\infty), \mathrm{SL}(\infty), \mathrm{SO}(\infty), \mathrm{Sp}(\infty)$. Двойственность, которую мы устанавливаем в этой статье, показывает, что структура $\mathbf{K}$-орбит на $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ является "зеркальным отражением" структуры $\mathbf{G}^0$-орбит на $\mathbf{G}/\mathbf{B}$. В частности, факт, что $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ допускает не более одной замкнутой $\mathbf{G}^0$-орбиты теперь следствие очевидного утверждения, что $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ допускает не более одной открытой по Зарисскому $\mathbf{K}$-орбиты.

Наш основной результат можно сформулировать следующим образом. Пусть $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{G}^0)$ — одна из троек перечисленных в разделе 2.1, состоящих из классической (комплексной) инд-группы $\mathbf{G}$, симметрической инд-подгруппы $\mathbf{K} \subset \mathbf{G}$ и соответствующей вещественной формы $\mathbf{G}^0 \subset \mathbf{G}$. Пусть $\mathbf{B} \subset \mathbf{G}$ — расщепляющая Борелевская инд-подгруппа такая, что $\mathbf{X} := \mathbf{G}/\mathbf{B}$ является инд-многообразием максимальных обобщённых флагов (изотропных для типов B, C, D) слабо согласованных с некоторым базисом в $\mathbf{V}$, соответствующим выбору $\mathbf{K}$ и $\mathbf{G}^0$ в смысле разделов 2.1, 2.3. Имеется естественное разложение $\mathbf{G} = \bigcup_{n\geq 1} G_n$ и $\mathbf{X} = \bigcup_{n\geq 1} X_n$. Здесь G_n — конечномерная алгебраическая группа, X_n — полное многообразие флагов в G_n, и вложение $X_n \subset \mathbf{X}$, в частности, G_n-эквивариантно. Подгруппы $K_n := \mathbf{K} \cap G_n$ и $G_n^0 := \mathbf{G}^0 \cap G_n$ являются, соответственно, симметрической подгруппой и вещественной формой группы G_n. Подробности см. в разделе 4.4 .

Теорема 1. (a) *Для всех $n \geq 1$ включение $X_n \subset \mathbf{X}$ индуцирует вложение множеств орбит $X_n/K_n \hookrightarrow \mathbf{X}/\mathbf{K}$ и $X_n/G_n^0 \hookrightarrow \mathbf{X}/\mathbf{G}^0$.*

(b) *Существует биекция $\Xi : \mathbf{X}/\mathbf{K} \to \mathbf{X}/\mathbf{G}^0$ такая, что диаграмма*

(1)
$$\begin{array}{ccc} X_n/K_n & \hookrightarrow & \mathbf{X}/\mathbf{K} \\ \downarrow{\scriptstyle \Xi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \Xi} \\ X_n/G_n^0 & \hookrightarrow & \mathbf{X}/\mathbf{G}^0 \end{array}$$

комутативна. Здесь Ξ_n означает двойственность Мацуки.

(c) *Для каждой $\mathbf{K}$-орбиты $\boldsymbol{\mathcal{O}} \subset \mathbf{X}$ пересечение $\boldsymbol{\mathcal{O}} \cap \Xi(\boldsymbol{\mathcal{O}})$ состоит из одной $\mathbf{K} \cap \mathbf{G}^0$-орбиты.*

(d) *Биекция Ξ обращает отношение включения на замыканиях орбит. В частности, Ξ отображает открытые (соответственно, замкнутые) $\mathbf{K}$-орбиты в замкнутые (соответственно, открытые) $\mathbf{G}^0$-орбиты.*

На самом деле наши результаты намного точнее: в предложениях 7, 8, 9 мы показывем, что $\mathbf{X}/\mathbf{K}$ и $\mathbf{X}/\mathbf{G}^0$ допускают одну и ту же явную параметризацию индуктивным пределом подходящих одинаковых параметризаций X_n/K_n и X_n/G_n^0. Это влечёт биекцию Ξ из теоремы 1 (b). Утверждения (a) и (b) из теоремы 1 удовлетворяют нашим требованиям (39), (42), (43) ниже. Теорема 1 (c) следует из соответсвующих утверждений в предложениях 7, 8, 9. Наконец, теорема 1 (d) получается из теоремы 1 (a) — (b), определения инд-топологии, и из факта, что двойственность Ξ_n обращает отношение включения на замыканиях орбит.

Например, в случае, когда $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(\infty)$ и $\mathbf{K} \subset \mathbf{G}$ — инд-подгруппа, сохраняющая ортогональную форму ω, мы показываем, что оба множества орбит $\mathbf{X}/\mathbf{K}$

и $\mathbf{X}/\mathbf{G}^0$ параметризуются инволюциями $\omega : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ такими, что $\omega(\ell) = i(\ell)$ для почти всех $\ell \in \mathbb{N}^*$, где i — инволюция, индуцированная матрицей формы ω в подходящем базисе натурального представления $\mathbf{G}$ (см. раздел 4.1).

Наши методы основаны на классификации симметрических подгрупп и вещественных форм классических простых алгебраических групп. Возможно, будущие исследования позволят привести доказательство наших результатов, не зависящее от классификации.

Организация статьи. В разделе 2 мы вводим обозначения для классических инд-групп, симметрических инд-подгрупп и вещественнх форм. Мы напоминаем несколько основных фактов о конечномерных многообразиях флагов, а также понятие инд-многообразия обобщённых флагов [4, 8]. В разделе 3 мы строим совместную параметризацию K- и G^0-орбит для конечномерных многообразий флагов. Возможно, эта параметризация известна (см. [13, 21]), однако мы не нашли ссылки, в которой она была бы представлена в точности, как у нас. Ради полноты статьи мы приводим явное доказательство этих результатов. В разделе 4 мы излагаем наши основные результаты о параметризации $\mathbf{K}$- и $\mathbf{G}^0$-орбит в инд-многообразиях обобщённых флагов. Сформулированная выше теорема 1 является основным следствием наших результатов. В секции 5 мы указываем некоторые дальнейшие следствия из основных результатов.

Через $\mathbb{N}^*$ мы обозначаем множество положительных целых чисел. $|A|$ обозначает мощность множества A. Симметрическая группа на n символах будет обозначаться $\mathfrak{S}_n$, а $\mathfrak{S}_\infty = \varinjlim \mathfrak{S}_n$ — бесконечная симметрическая группа. Часто мы будем писать w_k для образа $w(k)$ элемента k перестановки w. Через $(k;\ell)$ мы обозначим перестановку, которая меняет местами k и ℓ. Мы будем использовать полужирные символы для обозначения инд-многообразий. В конце статьи дан список обозначений.

Благодарности. Мы благодарим Алана Хаклберри и Михаила Игнатьева за поддержку идеи изучения двойственности Мацуки. Мы также признательны рецензенту за вдумчивые замечания. Первый автор получил частичную поддержку от Немецкого фонда научных исследований DFG через грант PE 980/6 − 1. Второй автор получил частичную поддержку от Израильского научного фонда ISF через грант 797/14, а также от проекта ANR-15-CE40-0012.

2. Обозначения и известные факты

2.1. **Классические группы и классические инд-группы.** Пусть $\mathbf{V}$ - комлексное векторное пространство счётной размерности, с упорядоченным базисом $E = (e_1, e_2, \ldots)$
$= (e_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}^*}$. Каждый вектор $x \in \mathbf{V}$ отождествляется со столбцом своих координат в базисе E, и $x \mapsto \overline{x}$ это отображаение комплексного сопряжения по отношению к базису E. Мы рассматриваем также конечномерные подпространства $V = V_n := \langle e_1, \ldots, e_n\rangle_\mathbb{C}$ в $\mathbf{V}$.

Классическая инд-группа $\mathrm{GL}(\infty)$ определяется как

$$\mathrm{GL}(\infty) = \mathbf{G}(E) := \{g \in \mathrm{Aut}(\mathbf{V}) : g(e_\ell) = e_\ell \text{ для всех } \ell \gg 1\} = \bigcup_{n\geq 1} \mathrm{GL}(V_n).$$

Вещественные формы инд-группы $\mathrm{GL}(\infty)$ хорошо известны и восходят к работе Баранова [1]. Ниже мы перечисляем согласованные пары $(\mathbf{K}, \mathbf{G}^0)$, где $\mathbf{G}^0$

— вещественная форма инд-группы $\mathbf{G}$, а $\mathbf{K}$ — симметрическая инд-подгруппа $\mathbf{G}$. Пары $\left(\mathbf{K}, \mathbf{G}^0\right)$, которые мы рассматриваем, согласованы следующим образом: для разложения $\mathbf{G}$ в качестве объединения $\bigcup_n \mathrm{GL}\,(V_n)$, подгруппа $K_n := \mathbf{K} \cap \mathrm{GL}\,(V_n)$ является симметрической подгруппой группы $\mathrm{GL}\,(V_n)$, $G_0^n := \mathbf{G}^0 \cap \mathrm{GL}\,(V_n)$ является вещественной формой группы $\mathrm{GL}\,(V_n)$, и $K_n \cap G_n^0$ — максимальная компактная подгруппа G_n^0.

2.1.1. *Типы A1 и A2.* Через Ω обозначим $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$-матрицу вида

$$\Omega = \begin{pmatrix} J_1 & & (0) \\ & J_2 & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{cases} J_k \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (1) \right\} & \text{(ортогональный случай, тип A1)} \\ J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{(симплектический случай, тип A2)} \end{cases} \tag{2}$$

Билинейная форма

$$\omega(x,y) := {}^t x \Omega y \quad (x, y \in \mathbf{V})$$

симметрична для типа A1 и симплектична для типа A2, в то время как отображение

$$\gamma(x) := \Omega \overline{x} \quad (x \in \mathbf{V})$$

это инволюция пространства $\mathbf{V}$ для типа A1 и антиинволюция для типа A2. Пусть

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}(E, \omega) := \{g \in \mathbf{G}(E) : \omega(gx, gy) = \omega(x,y)\ \forall x, y \in \mathbf{V}\}$$

и

$$\mathbf{G}^0 := \{g \in \mathbf{G}(E) : \gamma(gx) = g\gamma(x)\ \forall x \in \mathbf{V}\}.$$

2.1.2. *Тип A3.* Зафиксируем (нетривиальное) разложение $\mathbb{N}^* = N_+ \sqcup N_-$ и положим

$$\Phi = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & & (0) \\ & \epsilon_2 & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\epsilon_\ell = 1$ for $\ell \in N_+$ и $\epsilon_\ell = -1$ для $\ell \in N_-$. Таким образом

$$\phi(x,y) := {}^t \overline{x} \Phi y \quad (x, y \in \mathbf{V})$$

— Эрмитова форма сигнатуры $(|N_+|, |N_-|)$ и

$$\delta(x) := \Phi x \quad (x \in \mathbf{V})$$

— инволюция. Наконец положим

$$\mathbf{K} := \{g \in \mathbf{G}(E) : \delta(gx) = g\delta(x)\ \forall x \in \mathbf{V}\}$$

и

$$\mathbf{G}^0 := \{g \in \mathbf{G}(E) : \phi(gx, gy) = \phi(x,y)\ \forall x, y \in \mathbf{V}\}.$$

Типы B, C, D. Далее, мы опишем пары $(\mathbf{K}, \mathbf{G}^0)$, связанные с другими классическими инд-группами $\mathrm{SO}(\infty)$ и $\mathrm{Sp}(\infty)$. Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(E, \omega)$, где ω — (симметрическая или симплектическая) билинейная форма, задающаяся матрицей Ω как и в (2). С учётом (2), для каждого $\ell \in \mathbb{N}^*$ существует единственное число $\ell^* \in \mathbb{N}^*$ такое, что

$$\omega(e_\ell, e_{\ell^*}) \neq 0.$$

Далее, $\ell^* \in \{\ell - 1, \ell, \ell + 1\}$. Отображение $\ell \mapsto \ell^*$ это инволюция множества $\mathbb{N}^*$.

2.1.3. *Типы BD1 и C2.* Предположим, что форма ω симметрична для типа BD1 и симплектична для типа C2. Зафиксируем (нетривиальное) разложение $\mathbb{N}^* = N_+ \sqcup N_-$ такое, что

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ \ell \in N_+ \Leftrightarrow \ell^* \in N_+$$

и ограничение формы ω на каждое подпространство $\mathbf{V}_+ := \langle e_\ell : \ell \in N_+ \rangle_\mathbb{C}$ и $\mathbf{V}_- := \langle e_\ell : \ell \in N_- \rangle_\mathbb{C}$ невырождено. Пусть Φ, ϕ, δ — такие же как и в разделе 2.1.2. Тогда положим

$$\mathbf{K} := \{g \in \mathbf{G}(E, \omega) : \delta(gx) = g\delta(x)\ \forall x \in \mathbf{V}\} \tag{4}$$

и

$$\mathbf{G}^0 := \{g \in \mathbf{G}(E, \omega) : \phi(gx, gy) = \phi(x, y)\ \forall x, y \in \mathbf{V}\}. \tag{5}$$

2.1.4. *Типы C1 и D3.* Предположим, что форма ω симметрична для типа D3 и симплектична для типа C1. Зафиксируем разложение $\mathbb{N}^* = N_+ \sqcup N_-$, удовлетворяющее

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*,\ \ell \in N_+ \Leftrightarrow \ell^* \in N_-.$$

Заметим, что из-за этого каждый блок J_k в (2) должен иметь размер 2. В этой ситуации $\mathbf{V}_+ := \langle e_\ell : \ell \in N_+ \rangle_\mathbb{C}$ и $\mathbf{V}_- := \langle e_\ell : \ell \in N_- \rangle_\mathbb{C}$ являются максимальными изотропными подпространствами для формы ω. Определим Φ, ϕ, δ так же как и в разделе 2.1.2. Наконец, определим инд-подгруппы $\mathbf{K}, \mathbf{G}^0 \subset \mathbf{G}$ как в (4), (5).

Конечномерный случай. В следующей таблице представлены пересечения $G = \mathbf{G} \cap \mathrm{GL}\,(V_n)$, $K = \mathbf{K} \cap \mathrm{GL}\,(V_n)$, $G^0 = \mathbf{G}^0 \cap \mathrm{GL}\,(V_n)$, где число $n = 2m$ чётное для типов A2, C1, C2 и D3. Для типов A3, BD1 и C2, полагаем $(p, q) = (|N_+ \cap \{1, \ldots, n\}|, |N_- \cap \{1, \ldots, n\}|)$. Через $\mathbb{H}$ обозначаем тело кватернионов. Таким образом мы получаем классические конечномерные симметрические пары и вещественные формы (см., например, [2, 15, 16]).

type	$G := \mathbf{G} \cap \mathrm{GL}\,(V_n)$	$K := \mathbf{K} \cap \mathrm{GL}\,(V_n)$	$G^0 := \mathbf{G}^0 \cap \mathrm{GL}\,(V_n)$
A1	$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
A2		$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{GL}_m(\mathbb{H})$
A3		$\mathrm{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$	$\mathrm{U}_{p,q}(\mathbb{C})$
BD1	$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{O}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{O}_q(\mathbb{C})$	$\mathrm{O}_{p,q}(\mathbb{C})$
C1	$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$
C2		$\mathrm{Sp}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{Sp}_q(\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}_{p,q}(\mathbb{C})$
D3	$\mathrm{O}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{O}_{2m}(\mathbb{C})$	$\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$	$\mathrm{O}_n^*(\mathbb{C})$

В каждом случае вещественная форма G^0 получается из K таким образом, чтобы пересечение $K \cap G^0$ было максимальной компактной подгруппой G^0. Наоборот, K получается из G^0 как комплексификация максимальной компактной подгруппы.

2.2. **Конечномерные многообразия флагов.** Напомним, что $V = V_n$. Многообразие флагов $X := \mathrm{GL}(V)/B = \{gB : g \in \mathrm{GL}(V)\}$ (для Борелевской подгруппы $B \subset \mathrm{GL}(V)$) может рассматриваться как множество Борелевских подгрупп $\{gBg^{-1} : g \in \mathrm{GL}(V)\}$ или как множество полных флагов

$$\big\{\mathcal{F} = (F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n = V) : \dim F_k = k \ \text{ для всех } k\big\}. \tag{6}$$

Для каждого полного флага $\mathcal{F}$ обозначим через $B_{\mathcal{F}} := \{g \in \mathrm{GL}(V) : g\mathcal{F} = \mathcal{F}\}$ сответствующую Борелевскую подгруппу. Если $(v_1, \ldots, v_n)$ — базис пространства V, то мы будем писать

$$\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n) := \big(0 \subset \langle v_1\rangle_{\mathbb{C}} \subset \langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{C}} \subset \ldots \subset \langle v_1, \ldots, v_n\rangle_{\mathbb{C}}\big) \in X.$$

Разложение Брюа. Двойное многообразие флагов $X \times X$ имеет конечное число $\mathrm{GL}(V)$-орбит, параметризуемых перестановками $w \in \mathfrak{S}_n$. В самом деле, если даны два флага $\mathcal{F} = (F_k)_{k=0}^n$ и $\mathcal{F}' = (F'_\ell)_{\ell=0}^n$, то существет единственная перестановка $w =: w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ такая, что

$$\dim F_k \cap F'_\ell = \big|\big\{j \in \{1, \ldots, \ell\} : w_j \in \{1, \ldots, k\}\big\}\big|.$$

Перестановка $w(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ называется *относительной позицией* пары $(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \in X \times X$. При этом

$$X \times X = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{O}_w, \quad \text{где } \mathbb{O}_w := \big\{(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \in X \times X : w(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = w\big\},$$

есть разложение $X \times X$ в объединение $\mathrm{GL}(V)$-орбит. Единственная замкнутая орбита это $\mathbb{O}_{\mathrm{id}}$, и единственная открытая орбита это $\mathbb{O}_{w_0}$, где w_0 — инволюция, заданная равенством $w_0(k) = n - k + 1$ для всех k. Отображение $\mathbb{O}_w \mapsto \mathbb{O}_{w_0 w}$ это инволюция на множестве орбит, и она обращает отношение включения на замыканиях орбит. Представители $\mathbb{O}_w$ описываются следующим образом: для каждого базиса $(v_1, \ldots, v_n)$ of V мы имеем

$$\big(\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n), \mathcal{F}(v_{w_1}, \ldots, v_{w_n})\big) \in \mathbb{O}_w.$$

Многообразие изотропных флагов. Пусть V обладает невырожденной симметрической или симплектической билинейной формой ω. Для подпространства $F \subset V$, положим $F^\perp = \{x \in V : \omega(x, y) = 0 \ \forall y \in F\}$. Многообразие изотропных флагов X_ω является подмногообразием в X, где

$$X_\omega = \{\mathcal{F} = (F_k)_{k=0}^n \in X : F_k^\perp = F_{n-k} \ \forall k = 0, \ldots, n\}. \tag{7}$$

Оно обладает транзитивно действующей подгруппой $G(V, \omega) \subset \mathrm{GL}(V)$ автоморфизмов, сохраняющих форму ω.

Лемма 1. (a) *Для каждого эндоморфизма $f \in \mathrm{End}(V)$, обозначим через $f^* \in \mathrm{End}(V)$ эндоморфизм, сопряжённый к f относительно формы ω. Пусть $H \subset \mathrm{GL}(V)$ подгруппа, удовлетворяющая условию*

$$\mathbb{C}[g^* g] \cap \mathrm{GL}(V) \subset H \quad \textit{для всех } g \in H. \tag{8}$$

Предположим, что $\mathcal{F} \in X_\omega$ и $\mathcal{F}' \in X_\omega$ принадлежат одной H-орбите в X. Тогда они принадлежат одной $H \cap G(V, \omega)$-орбите в X_ω.
(b) *Пусть $H = \{g \in \mathrm{GL}(V) : g(V_+) = V_+, \ g(V_-) = V_-\}$, где $V = V_+ \oplus V_-$ это разложение такое, что $(V_+^\perp, V_-^\perp) = (V_+, V_-)$ или (V_-, V_+). Тогда (8) выполняется.*

Доказательство. (a) Отметим, что $G(V, \omega) = \{g \in \mathrm{GL}(V) : g^* = g^{-1}\}$. Рассмотрим элемент $g \in H$ такой, что $\mathcal{F}' = g\mathcal{F}$. Равенство $(gF)^\perp = (g^*)^{-1} F^\perp$ выполняется для всех подпространств $F \subset V$. Так как $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ принадлежат X_ω, мы получаем $\mathcal{F}' = (g^*)^{-1}\mathcal{F}$, поэтому $g^* g\mathcal{F} = \mathcal{F}$. Пусть $g_1 = g^* g$. Согласно [10, Лемма 1.5] существет полином $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ такой, что $P(g_1)^2 = g_1$. Положим $h = P(g_1)$. Тогда $h \in \mathrm{GL}(V)$ (так как $h^2 = g_1 \in \mathrm{GL}(V)$), и из (8) вытекает, что на самом деле $h \in H$. Далее, $h^* = h$ (поскольку $h \in \mathbb{C}[g_1]$ и $g_1^* = g_1$) и

$h\mathcal{F} = \mathcal{F}$ (так как и каждое подпространство в $\mathcal{F}$ является g_1-подмодулем и, следовательно, также h-подмодулем). Положим $h_1 := gh^{-1} \in H$. Тогда, с одной стороны,

$$h_1^* = (h^*)^{-1} g^* = h^{-1} g_1 g^{-1} = h^{-1} h^2 g^{-1} = hg^{-1} = h_1^{-1}.$$

Поэтому $h_1 \in H \cap G(V, \omega)$. С другой стороны, $h_1\mathcal{F} = gh^{-1}\mathcal{F} = g\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, и часть (a) доказана.
(b) Равенство $g^*(gF)^\perp = F^\perp$ (которое уже упоминалось), применяемое к $F = V_\pm$, даёт $g^* \in H$, и таким образом $g^*g \in H$, если $g \in H$. Поэтому выполняется (8). □

Замечание 1. Идея доказательства леммы 1 (a) навеяна нам [10, §1.4]. В работах [14, 17] читатель найдёт аналогичные результаты и обобщения.

2.3. **Инд-многообразия обобщённых флагов.** Напомним, что $\mathbf{V}$ обозначает комплексное векторное пространство счётной размерности, с упорядоченным базисом $E = (e_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$.

Определение 1 ([4])**.** Пусть $\mathcal{F}$ будет цепью подпространств в $\mathbf{V}$, то есть, множеством подпространств из $\mathbf{V}$, полностью упорядоченным по включению . Пусть $\mathcal{F}'$ (соответственно $\mathcal{F}''$) — подцепь, состоящая из всех $F \in \mathcal{F}$ с непосредственным последующим (соответственно предыдущим) элементом. Через $s(F) \in \mathcal{F}''$ мы обозначим подпространство непосредственно следующее за $F \in \mathcal{F}'$.

Обобщённый флаг в $\mathbf{V}$ это цепь подпространств $\mathcal{F}$ такая что:

(i) каждый $F \in \mathcal{F}$ обладает непосредственно последующим или предыдущим элементом, то есть, $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \mathcal{F}''$;
(ii) для каждого $v \in \mathbf{V} \setminus \{0\}$ существует единственное подпространство $F_v \in \mathcal{F}'$ такое, что $v \in s(F_v) \setminus F_v$, то есть, $\mathbf{V} \setminus \{0\} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}'} (s(F) \setminus F)$.

Обобщённый флаг назывется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом обобщённом флаге. В частности, $\mathcal{F}$ максимален тогда и только тогда, когда $\dim s(F)/F = 1$ для всех $F \in \mathcal{F}'$.

Обозначение 1. Пусть $\sigma : \mathbb{N}^* \to (A, \prec)$– сюръективное отображение на полностью упорядоченное множество. Пусть $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots)$ — базис в $\mathbf{V}$. Для каждого $a \in A$ положим

$$F'_a := \langle v_\ell : \sigma(\ell) \prec a \rangle_{\mathbb{C}}, \quad F''_a := \langle v_\ell : \sigma(\ell) \preceq a \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Тогда $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\sigma(\underline{v}) := \{F'_a, F''_a : a \in A\}$ — обобщённый флаг, такой что $\mathcal{F}' = \{F'_a : a \in A\}$, $\mathcal{F}'' = \{F''_a : a \in A\}$, и $s(F'_a) = F''_a$ для всех a. Мы называем такой обобщённый флаг *согласованным с базисом* $\underline{v}$.

Более того, $\mathcal{F}_\sigma(\underline{v})$ максимален, тогда и только тогда, когда отображение σ биективно.

В дальнейшем будем использовать сокращённое обозначение $\mathcal{F}_\sigma := \mathcal{F}_\sigma(E)$.

Отметим, что для каждого обобщённого флага существует согласованный с ним базис [4, предложение 4.1]. Обобщённый флаг *слабо согласован с* E, если он согласован с некоторым базисом $\underline{v}$ таким, что $E \setminus (E \cap \underline{v})$ — конечное множество (аналогично, $\dim \mathbf{V}/\langle E \cap \underline{v} \rangle_{\mathbb{C}} < \infty$).

Группа $\mathbf{G}(E)$ (так же как и $\mathrm{Aut}(\mathbf{V})$) действует на множестве обобщённых флагов естественным образом. Пусть $\mathbf{P}_\mathcal{F} \subset \mathbf{G}(E)$ обозначает инд-подгруппу, состоящую из элементов сохраняющих $\mathcal{F}$. Это замкнутая инд-подгруппа группы $\mathbf{G}(E)$. Если $\mathcal{F}$ согласован с E, то $\mathbf{P}_{\mathcal{F}}$ — расщепляющая параболическая инд-подгруппа в $\mathbf{G}(E)$ в том смысле, что она локально параболическая (то есть, существует исчерпание $\mathbf{G}(E)$ конечномерными редуктивными алгебраическими подгруппами G_n такими, что все пересечения $\mathbf{P}_{\mathcal{F}} \cap G_n$ — параболические подгруппы в G_n) и содержит Картановскую инд-подгруппу $\mathbf{H}(E) \subset \mathbf{G}(E)$, состоящую из диагональных элементов относительно базиса E. Более того, если $\mathcal{F}$ максимален, тогда $\mathbf{B}_{\mathcal{F}} := \mathbf{P}_{\mathcal{F}}$ является расщепляющей Борелевской инд-подгруппой (то есть все вышеупомянутые пересечения $\mathbf{B}_{\mathcal{F}} \cap G_n$ суть Борелевские подгруппы в G_n).

Определение 2 ([4])**.** Два обобщённых флага $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ называются *E-соизмеримыми*, если $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ слабо согласованы с E, и существует изоморфизм $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ упорядоченных множеств и конечномерное подпространство $U \subset \mathbf{V}$ такие, что

(i) $\phi(F) + U = F + U$ для всех $F \in \mathcal{F}$;
(ii) $\dim \phi(F) \cap U = \dim F \cap U$ для всех $F \in \mathcal{F}$.

E-соизмеримость — отношение эквивалентности на множестве обобщённых флагов слабо согласованных с E. На самом деле, согласно следующему предложению, каждый класс эквивалентности состоит из одной $\mathbf{G}(E)$-орбиты. Если $\mathcal{F}$ обобщённый флаг слабо согласован с E, мы обозначим через $\mathbf{X}(\mathcal{F}, E)$ множество обобщённых флагов, которые E-соизмеримы с $\mathcal{F}$.

Предложение 1 ([4])**.** *Множество $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathcal{F}, E)$ обладает естественной структурой инд-многообразия. Далее, $\mathbf{X}$ является $\mathbf{G}(E)$-однородным инд-многообразием и отображение $g \mapsto g\mathcal{F}$ индуцирует изоморфизм инд-многообразий $\mathbf{G}(E)/\mathbf{P}_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{X}$.*

Предложение 2 ([5])**.** *Пусть $\sigma : \mathbb{N}^* \to (A, \prec)$ и $\tau : \mathbb{N}^* \to (B, \prec)$ — два сюръективных отображения на полностью упорядоченные множества.*

(a) *Каждый E-согласованный обобщённый флаг в $\mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$ имеет вид $\mathcal{F}_{\sigma w}$ для $w \in \mathfrak{S}_\infty$. Более того, $\mathcal{F}_{\sigma w} = \mathcal{F}_{\sigma w'} \Leftrightarrow w'w^{-1} \in \mathrm{Stab}_\sigma := \{v \in \mathfrak{S}_\infty : \sigma v = \sigma\}$.*
(b) *Предположим, что $\mathcal{F}_\tau$ максимален (то есть, τ — биекция), и, таким образом, $\mathbf{B}_{\mathcal{F}_\tau}$ — расщепляющая Борелевская инд-подгруппа. Каждая $\mathbf{B}_{\mathcal{F}_\tau}$-орбита в $\mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$ содержит единственный элемент вида $\mathcal{F}_{\sigma w}$ для $w \in \mathfrak{S}_\infty/\mathrm{Stab}_\sigma$.*
(c) *В частности, если $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\tau$ оба максимальны (то есть, σ, τ — биекции), то*
$$\mathbf{X}(\mathcal{F}_\tau, E) \times \mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E) = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{S}_\infty} (\mathbb{O}_{\tau,\sigma})_w,$$
где
$$(\mathbb{O}_{\tau,\sigma})_w := \{(g\mathcal{F}_\tau, g\mathcal{F}_{\sigma w}) : g \in \mathbf{G}(E)\}$$
— разложение пространства $\mathbf{X}(\mathcal{F}_\tau, E) \times \mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$ на $\mathbf{G}(E)$-орбиты.

Замечание 2. Орбита $(\mathbb{O}_{\tau,\sigma})_w$ из предложения 2 (c) на самом деле состоит из всех пар обобщённых флагов $(\mathcal{F}_\tau(\underline{v}), \mathcal{F}_{\sigma w}(\underline{v}))$ слабо согласованных с базисом $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots)$.

Предположим, $\mathbf{V}$ обладает невырожденной симметрической или симплектической формой ω, значения которой на элементах базиса E могут быть получены из матрицы Ω в (2).

Определение 3. Обобщённый флаг $\mathcal{F}$ назывется *ω-изотропным*, если отображение $F \mapsto F^{\perp} := \{x \in \mathbf{V} : \omega(x,y) = 0 \ \forall y \in F\}$ является инволюцией обобщённого флага $\mathcal{F}$.

Предложение 3 ([4]). *Пусть $\mathcal{F}$ есть ω-изотропный обобщённый флаг слабо согласованный с E. Множество $\mathbf{X}_\omega(\mathcal{F},E)$ всех ω-изотропных обобщённых флагов, которые E-соизмеримы с $\mathcal{F}$, является $\mathbf{G}(E,\omega)$-однородным, замкнутым инд-подмногообразием в $\mathbf{X}(\mathcal{F},E)$.*

Наконец, мы хотели бы отметить, что одна из основных особенностей инд-групп это факт, что их Борелевские подгруппы не $\mathrm{Aut}(\mathbf{G})$-сопряжены. Вот три примера максимальных обобщённых флагов в $\mathbf{V}$, согласованных с базисом E, и таких, что их стабилизаторы в $\mathbf{G}(E)$ попарно не $\mathrm{Aut}(\mathbf{G})$-сопряжены. Более подробное обсуждение этих примеров см. в [4].

Пример 1. (a) Пусть $\sigma_1 : \mathbb{N}^* \to (\mathbb{N}^*,<)$, $\ell \mapsto \ell$. Обобщённый флаг $\mathcal{F}_{\sigma_1}$ это восходящая цепочка подпространств $\mathcal{F}_{\sigma_1} = \{0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots\}$, изоморфная упорядоченному множеству $(\mathbb{N},<)$.
(b) Пусть $\sigma_2 : \mathbb{N}^* \to \left(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^*\},<\right)$, $\ell \mapsto \frac{(-1)^\ell}{\ell}$. Обобщённый флаг $\mathcal{F}_{\sigma_2}$ это цепь вида $\mathcal{F}_{\sigma_2} = \{0 = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{-2} \subset F_{-1} = \mathbf{V}\}$ не изоморфная как упорядоченное множество подмножеству в $(\mathbb{Z},<)$.
(c) Пусть $\sigma_3 : \mathbb{N}^* \to (\mathbb{Q},<)$ - биекция. В этом случе нет подпространств $F \in \mathcal{F}_{\sigma_3}$, у которых есть одновременно непосредственно последующее и непосредственно предыдущее подпространство.

3. Параметризация орбит в конечномерном случае

В разделах 3.1-3.3, мы приводим явную параметризацию K- и G^0-орбит в конечномерном случае. Все доказательства представленны в разделе 3.5.

3.1. **Типы A1 и A2.** Обозначения такие же, как и в разделе 2.1.1. Пространство $V = V_n := \langle e_1,\ldots,e_n\rangle_{\mathbb{C}}$ обладает симметрической или симплектической билинейной формой $\omega(x,y) = {}^t x \cdot \Omega \cdot y$ и сопряжением $\gamma(x) = \Omega\overline{x}$, которые являются ограничениями на V отображений ω,γ, введённых в разделе 2.1. Это позволяет нам определить две инволюции многообразия флагов X:

$$\mathcal{F} = (F_0,\ldots,F_n) \mapsto \mathcal{F}^\perp := (F_n^\perp,\ldots,F_0^\perp) \quad \text{и} \quad \mathcal{F} \mapsto \gamma(\mathcal{F}) := (\gamma(F_0),\ldots,\gamma(F_n)),$$

где $F^\perp \subset V$ обозначает подпространство, ортогональное F по отношению к форме ω.

Положим $K = \{g \in \mathrm{GL}(V) : g \text{ сохраняет } \omega\}$ и $G^0 = \{g \in \mathrm{GL}(V) : \gamma g = g\gamma\}$.

Через $\mathfrak{I}_n \subset \mathfrak{S}_n$ мы обозначим подмножество инволюций. Если $n = 2m$ чётное, тогда $\mathfrak{I}'_n \subset \mathfrak{I}_n$ будет подмножеством инволюций без неподвижных точек.

Определение 4. Пусть $w \in \mathfrak{I}_n$. Зададим $\epsilon := 1$ для типа A1 и $\epsilon := -1$ для типа A2. Базис $(v_1,\ldots,v_n)$ в V такой, что

$$\omega(v_k,v_\ell) = \begin{cases} 1, & \text{если } w_k = \ell \geq k \\ \epsilon, & \text{если } w_k = \ell < k \\ 0, & \text{если } w_k \neq \ell \end{cases} \quad \text{для всех } k,\ell \in \{1,\ldots,n\}$$

называется *w-двойственным.* Базис $(v_1, \dots, v_n)$ в V такой, что

$$\gamma(v_k) = \begin{cases} \epsilon v_{w_k}, & \text{если } w_k \geq k \\ v_{w_k}, & \text{если } w_k < k \end{cases} \quad \text{для всех } k \in \{1, \dots, n\}$$

называется *w-сопряжённым.* Положим

$$\mathcal{O}_w := \{\mathcal{F}(v_1, \dots, v_n) : (v_1, \dots, v_n) \text{ — } w\text{-двойственный базис}\},$$

$$\mathfrak{O}_w := \{\mathcal{F}(v_1, \dots, v_n) : (v_1, \dots, v_n) \text{ — } w\text{-сопряжённый базис}\}.$$

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{I}_n^\epsilon = \mathfrak{I}_n$ для типа A1 и $\mathfrak{I}_n^\epsilon = \mathfrak{I}'_n$ для типа A2. Напомним обозначения $\mathbb{O}_w$ и w_0, введённые в разделе 2.2.*

(a) *Для каждого $w \in \mathfrak{I}_n^\epsilon$ мы имеем $\mathcal{O}_w \neq \emptyset$, $\mathfrak{O}_w \neq \emptyset$ и $\mathcal{O}_w \cap \mathfrak{O}_w = \{\mathcal{F}(v_1, \dots, v_n) : (v_1, \dots, v_n)$ w-двойствен и w-сопряжён$\} \neq \emptyset$.*

(b) *Для каждого $w \in \mathfrak{I}_n^\epsilon$,*

$$\mathcal{O}_w = \{\mathcal{F} \in X : (\mathcal{F}^\perp, \mathcal{F}) \in \mathbb{O}_{w_0 w}\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{O}_w = \{\mathcal{F} \in X : (\gamma(\mathcal{F}), \mathcal{F}) \in \mathbb{O}_w\}.$$

(c) *Подмножества $\mathcal{O}_w$ $(w \in \mathfrak{I}_n^\epsilon)$ суть в точности K-орбиты из X. Подмножества $\mathfrak{O}_w$ $(w \in \mathfrak{I}_n^\epsilon)$ суть в точности G^0-орбиты из X.*

(d) *Отображение $\mathcal{O}_w \mapsto \mathfrak{O}_w$ есть двойственность Мацуки.*

3.2. **Тип A3.** Обозначения такие же как и в разделе 2.1.2: пространство $V = V_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$ обладает Эрмитовой формой $\phi(x, y) = {}^t\overline{x}\Phi y$ и сопряжением $\delta(x) = \Phi x$, где Φ это диагональная матрица, состоящая из $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{+1, -1\}$ (эта матрица ни что иное, как левый верхний $n \times n$-угол матрицы Φ из раздела 2.1).

Зададим $V_+ = \langle e_k : \epsilon_k = 1 \rangle_{\mathbb{C}}$ и $V_- = \langle e_k : \epsilon_k = -1 \rangle_{\mathbb{C}}$. Тогда $V = V_+ \oplus V_-$. Пусть $K = \{g \in \mathrm{GL}(V) : \delta g = g\delta\} = \mathrm{GL}(V_+) \times \mathrm{GL}(V_-)$ и $G^0 = \{g \in \mathrm{GL}(V) : g \text{ сохраняет } \phi\}$.

Как и в разделе 3.1 мы получаем две инволюции многообразия флагов X:

$$\mathcal{F} = (F_0, \dots, F_n) \mapsto \delta(\mathcal{F}) := (\delta(F_0), \dots, \delta(F_n)) \quad \text{и} \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^\dagger := (F_n^\dagger, \dots, F_0^\dagger),$$

где $F^\dagger \subset V$ обозначение для подпространства, ортогонального $F \subset V$ относительно формы ϕ. Эрмитова форма на факторе $F/(F \cap F^\dagger)$ индуцированная формой ϕ невырождена; мы обозначим её сигнатуру через $\varsigma(\phi : F)$. Пусть задан $\mathcal{F} = (F_0, \dots, F_n) \in X$, и пусть

$$\varsigma(\phi : \mathcal{F}) := \big(\varsigma(\phi : F_\ell)\big)_{\ell=1}^n \in (\{0, \dots, n\}^2)^n.$$

Тогда

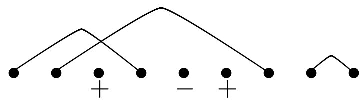
$$\varsigma(\delta : \mathcal{F}) := \big((\dim F_\ell \cap V_+, \dim F_\ell \cap V_-)\big)_{\ell=1}^n \in (\{0, \dots, n\}^2)^n$$

отмечает относительное положение $\mathcal{F}$ по отношению к подпространствам V_+ и V_-.

Комбинаторные обозначения. Мы назовём *инволюцией со знаками* пару (w, ε), состоящую из инволюции $w \in \mathfrak{I}_n$ и значений $\varepsilon_k \in \{+1, -1\}$, прикреплённых к заданным позициям $k \in \{\ell : w_\ell = \ell\}$. (Эквивалентным образом, ε является отображением $\{\ell : w_\ell = \ell\} \to \{+1, -1\}$.)

Удобно представлять w в виде графа $l(w)$ (называемого *шаблоном связей*) с n вершинами $1, 2, \dots, n$ и дугами (k, w_k), соединяющими k и w_k всякий раз, когда $k < w_k$. *Шаблон связей со знаками* $l(w, \varepsilon)$ получается из графа $l(w)$, если пометить каждую вершину $k \in \{\ell : w_\ell = \ell\}$ знаком ε_k.

Например, следующий шаблон связей со знаками (где нумерация вершин неявна)



представляет элемент (w,ε), где $w=(1;4)(2;7)(8;9)\in\mathfrak{I}_9$ и $(\varepsilon_3,\varepsilon_5,\varepsilon_6)=(+1,-1,+1)$.

Определим $\varsigma(w,\varepsilon):=\{(p_\ell,q_\ell)\}_{\ell=1}^n$ как пару последовательностей, получаемых следующим образом:

$$p_\ell \text{ (соответственно, } q_\ell) = (\text{количество знаков } + \text{ (соответственно, знаков } - \text{)}$$

$$\text{и дуг проходящих через первые } \ell \text{ вершин } l(w,\varepsilon)).$$

Предполагая $n=p+q$, обозначим через $\mathfrak{I}_n(p,q)$ множество инволюций со знаками сигнатуры (p,q), то есть таких, что $(p_n,q_n)=(p,q)$. Отметим, что элементы из $\mathfrak{I}_n(p,q)$ совпадают с множеством сигнатуры (p,q) в смысле [13, 21].

Например, для вышеуказанной пары (w,ε) мы получаем $(w,\varepsilon)\in\mathfrak{I}_9(5,4)$ и

$$\varsigma(w,\varepsilon)=\big((0,0),(0,0),(1,0),(2,1),(2,2),(3,2),(4,3),(4,3),(5,4)\big).$$

Определение 5. Для данной инволюции со знаками (w,ε) мы будем говорить, что базис $(v_1,\ldots,v_n)$ в V (w,ϵ)*-сопряжён*, если

$$\delta(v_k)=\begin{cases}\varepsilon_k v_{w_k}, & \text{если } w_k=k\\ v_{w_k}, & \text{если } w_k\neq k\end{cases}\quad \text{для всех } k\in\{1,\ldots,n\}.$$

Базис $(v_1,\ldots,v_n)$ такой, что

$$\phi(v_k,v_\ell)=\begin{cases}\varepsilon_k, & \text{если } w_k=\ell=k\\ 1, & \text{если } w_k=\ell\neq k\\ 0, & \text{если } w_k\neq\ell\end{cases}\quad \text{для всех } k,\ell\in\{1,\ldots,n\}$$

называется (w,ε)*-двойственным.* Положим

$$\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}:=\{\mathcal{F}(v_1,\ldots,v_n):(v_1,\ldots,v_n)-(w,\varepsilon)\text{-сопряжённый базис}\},$$
$$\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}:=\{\mathcal{F}(v_1,\ldots,v_n):(v_1,\ldots,v_n)-(w,\varepsilon)\text{-двойственный базис}\}.$$

Предложение 5. *В дополнение к обозначениям выше, положим* $(p,q)=(\dim V_+,\dim V_-)$. *Тогда:*

(a) *Для каждой* $(w,\varepsilon)\in\mathfrak{I}_n(p,q)$ *подмножества* $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}$ *и* $\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$ *непусты, и* $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}\cap\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}=$

$$\{\mathcal{F}(\underline{v}):\underline{v}=(v_k)_{k=1}^n\ (w,\varepsilon)\text{-}\textit{двойственен и }(w,\varepsilon)\text{-}\textit{сопряжён}\}\neq\emptyset.$$

(b) *Для каждого* $(w,\varepsilon)\in\mathfrak{I}_n(p,q)$,

$$\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}=\big\{\mathcal{F}\in X:(\delta(\mathcal{F}),\mathcal{F})\in\mathbb{O}_w\ \text{ и } \varsigma(\delta:\mathcal{F})=\varsigma(w,\varepsilon)\big\},$$
$$\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}=\big\{\mathcal{F}\in X:(\mathcal{F}^\dagger,\mathcal{F})\in\mathbb{O}_{w_0w}\ \text{ и } \varsigma(\phi:\mathcal{F})=\varsigma(w,\varepsilon)\big\}.$$

(c) *Подмножества* $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}$ $((w,\varepsilon)\in\mathfrak{I}_n(p,q))$ *в точности* K*-орбиты в* X. *Подмножества* $\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$ $((w,\varepsilon)\in\mathfrak{I}_n(p,q))$ *в точности* G^0*-орбиты в* X.

(d) *Отображение* $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}\mapsto\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$ *есть двойственность Мацуки.*

3.3. **Типы B, C, D.** В этом разделе мы будем предполагать, что пространство $V = V_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\mathbb{C}}$ обладает симметрической или симплектической формой ω, действие которой на базисе $(e_1, \dots, e_n)$ описывается матрицей Ω из (2). Мы рассматриваем группу $G = G(V, \omega) = \{g \in \mathrm{GL}(V) : g \text{ сохраняет } \omega\}$ и многообразие изотропных флагов $X_\omega = \{\mathcal{F} \in X : \mathcal{F}^\perp = \mathcal{F}\}$ (см. раздел 2.2).

В дополнение мы предположим, что V обладает Эрмитовой формой ϕ, сопряжением δ и разложением $V = V_+ \oplus V_-$ (как и в разделе 3.2) таким, что

- в случаях BD1 и C2 ограничения формы ω на V_+ и V_- невырождены, то есть, $V_+^\perp = V_-$,
- в случаях C1 и D3 V_+ и V_- — Лагранжевы по отношению ω, то есть, $V_+^\perp = V_+$ и $V_-^\perp = V_-$.

Положим $K := \{g \in G : g\delta = \delta g\}$ и $G^0 := \{g \in G : g \text{ сохраняет } \phi\}$.

Комбинаторные обозначения. Напомним, что $w_0(k) = n - k + 1$. Пусть $(\eta, \epsilon) \in \{1, -1\}^2$. Инволюция со знаками (w, ε) называется (η, ϵ)-*симметричной*, если выполнены следующие условия:

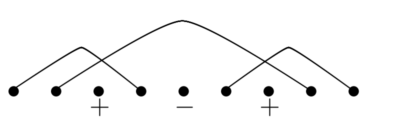
(i) $ww_0 = w_0 w$ (так, что w_0 сохраняет множество $\{\ell : w_\ell = \ell\}$);
(ii) $\varepsilon_{w_0(k)} = \eta \varepsilon_k$ для всех $k \in \{\ell : w_\ell = \ell\}$;

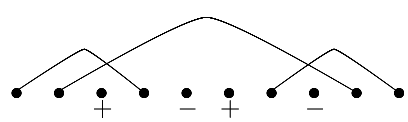
и в случае, когда $\eta \neq \epsilon$:

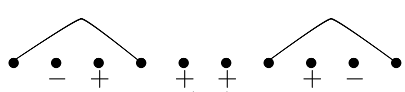
(iii) $w_k \neq w_0(k)$ для всех k.

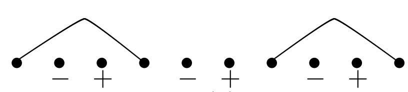
Предположим, что $n = p + q$, и через $\mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p, q) \subset \mathfrak{I}_n(p, q)$ обозначим подмножество инволюций со знаками сигнатуры (p, q), которые (η, ϵ)-симметричны.

В частности, инволюция со знаками (w, ε) $(1, 1)$-симметрична, когда шаблон связей со знаками $l(w, \varepsilon)$ симметричен относительно обращения нумерации вершин; инволюция со знаками (w, ε) $(1, -1)$-симметрична, когда $l(w, \varepsilon)$ симметричен и не имеет симметричных дуг (то есть, соединённых k и $n - k + 1$); (w, ε) $(-1, -1)$-симметрична, когда $l(w, \varepsilon)$ антисимметричен в смысле того, что зеркальный образ $l(w, \varepsilon)$ это шаблон связей со знаками с теми же дугами но противоположными знаками; (w, ε) $(-1, 1)$-симметрична, когда $l(w, \varepsilon)$ антисимметричен и не имеет симметричных дуг. Например:


$(w, \varepsilon) \in \mathfrak{I}_9^{1,1}(5, 4)$,


$(w, \varepsilon) \in \mathfrak{I}_{10}^{-1,-1}(5, 5)$,


$(w, \varepsilon) \in \mathfrak{I}_{10}^{1,-1}(6, 4)$,


$(w, \varepsilon) \in \mathfrak{I}_{10}^{-1,1}(5, 5)$.

Предложение 6. *Положим $(p, q) = (\dim V_+, \dim V_-)$ (так, что $p = q = \frac{n}{2}$ для типов C1 и D3). Зададим $(\eta, \epsilon) = (1, 1)$ для типа BD1, $(\eta, \epsilon) = (1, -1)$ для типа C2, $(\eta, \epsilon) = (-1, -1)$ для типа C1 и $(\eta, \epsilon) = (-1, 1)$ для типа D3.*

(a) *Для каждого* $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p,q)$, *рассматривая базис* $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ *в* V *такой, что*

$$\omega(v_k, v_\ell) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ell \neq n-k+1 \\ 1, & \text{если } \ell = n-k+1 \text{ и } w_k, w_\ell \in [k,\, \ell] \ (k \leq \ell) \\ \epsilon, & \text{если } \ell = n-k+1 \text{ и } w_k, w_\ell \in [\ell,\, k] \ (\ell \leq k) \\ \eta, & \text{если } \ell = n-k+1 \text{ и } k, \ell \in]w_k,\, w_\ell[\\ \eta\epsilon, & \text{если } \ell = n-k+1 \text{ и } k, \ell \in]w_\ell,\, w_k[, \end{cases} \tag{9}$$

мы получаем

$\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)} :=$
$\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega = \{\mathcal{F}(\underline{v}) : \underline{v}\ (w,\varepsilon)\text{-сопряжён и удовлетворяет (9)}\} \neq \emptyset,$
$\mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)} :=$
$\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega = \{\mathcal{F}(\underline{v}) : \underline{v}\ (w,\varepsilon)\text{-двойственен и удовлетворяет (9)}\} \neq \emptyset,$
$\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)} \cap \mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)} =$
$= \{\mathcal{F}(\underline{v}) : \underline{v}\ (w,\varepsilon)\text{-сопряжён, } (w,\varepsilon)\text{-двойственен и удовлетворяет (9)}\} \neq \emptyset.$

(b) *Подмножества* $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$ $((w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p,q))$ *суть в точности* K*-орбиты в* X_ω. *Подмножества* $\mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$ $((w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p,q))$ *суть в точности* G^0*-орбиты в* X_ω.

(c) *Отображение* $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)} \mapsto \mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$ *есть двойственность Мацуки.*

3.4. **Замечания.** Положим $X_0 := X$ для типа A и $X_0 := X_\omega$ для типов B, C, D.

Замечание 3. Характеризация K-орбит в разделах 4 — 6 может быть получена следующим единым образом. Если $\mathcal{F} \in X$, мы будем писать $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}^\perp$ для типов A1–A2 и $\sigma(\mathcal{F}) = \delta(\mathcal{F})$ для типов A3, BD1, C1–C2, D3. Пусть $P \subset G$ — параболическая подгруппа, содержащая K и минимальная с этим свойством. Два флага $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in X_0$ принадлежат одной K-орбите тогда и только тогда $(\sigma(\mathcal{F}_1), \mathcal{F}_1)$ и $(\sigma(\mathcal{F}_2), \mathcal{F}_2)$ принадлежат одной P-орбите для диагонального действия P на $X_0 \times X_0$.

Замечание 4. (Открытые K-орбиты.) В обозначениях из замечания 3 отображение $\sigma_0 : X_0 \to X \times X$, $\mathcal{F} \mapsto (\sigma(\mathcal{F}), \mathcal{F})$ является замкнутым вложением.

Для типов A и C многообразие флагов X_0 неприводимо. В частности, существует единственная G-орбита $\mathbb{O}_w \subset X \times X$ такая, что пересечение $\mathbb{O}_w \cap \sigma_0(X_0)$ открыто в $\sigma_0(X_0)$; оно соответствует элементу $w \in \mathfrak{S}_n$ максимальному для порядка Брюа такому, что $\mathbb{O}_w$ пересекается с $\sigma_0(X_0)$. Во всех случаях найдётся единственная K-орбита $\mathcal{O} \subset X_0$ такая, что $\sigma_0(\mathcal{O}) \subset \mathbb{O}_w$, поэтому это (единственная) открытая K-орбита в X_0. Таким образом, мы получаем следующий список открытых K-орбит для типов A1–A3, C1–C2:

A1: $\mathcal{O}_{\mathrm{id}}$;
A2: $\mathcal{O}_{v_0}$, где $v_0 = (1;2)(3;4)\cdots(n-1;n)$;
A3: $\mathcal{O}_{(w_0^{(t)},\varepsilon)}$, где $t = \min\{p,q\}$, $\varepsilon \equiv \mathrm{sign}(p-q)$ и $w_0^{(t)} = \prod_{k=1}^{t}(k; n-k+1)$;
C1: $\mathcal{O}^{-1,-1}_{(w_0,\emptyset)}$;
C2: $\mathcal{O}^{1,-1}_{(\hat{w}_0^{(t)},\varepsilon)}$, где $t = \min\{p,q\}$, $\varepsilon \equiv \mathrm{sign}(p-q)$ и $\hat{w}_0^{(t)} = v_0^{(t)} w_0^{(t)} v_0^{(t)}$, где $v_0^{(t)} = (1;2)(3;4)\cdots(t-1;t)$.

Если $n = \dim V$ чётно и форма ω ортогональна, то многообразие X_ω иимеет две связные компоненты. В самом деле, для каждого изотропного флага $\mathcal{F} = (F_k)_{k=0}^n \in X_\omega$ существет единственный изотропный флаг $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{F}_k)_{k=0}^n \in X_\omega$ такой, что $F_k = \tilde{F}_k$ для всех $k \neq m := \frac{n}{2}$, $\tilde{F}_m \neq F_m$. Тогда отображение $\tilde{I} : \mathcal{F} \mapsto \tilde{\mathcal{F}}$ — автоморфизм X_ω, который отображает одну связную компоненту X_ω на другую. Если $\mathcal{F} = \mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n)$ для базиса $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ такого, что

$$\omega(v_k, v_\ell) \neq 0 \Leftrightarrow \ell = n - k + 1,$$

то $\tilde{I}(\mathcal{F}(\underline{v})) = \mathcal{F}(\underline{\tilde{v}})$, где $\underline{\tilde{v}}$ — базис полученный $\underline{v}$ перестановкой двух средних векторов v_m, v_{m+1}. Если $\underline{v}$ — (w,ε)-сопряжённый, то $\underline{\tilde{v}}$ — $\tilde{i}(w,\varepsilon)$-сопряжённый, где $\tilde{i}(w,\varepsilon) := \big((m;m+1)w(m;m+1), \varepsilon \circ (m;m+1)\big)$. Следовательно $\tilde{I}$ отображает K-орбиту $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$ на $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{\tilde{i}(w,\varepsilon)}$.

Для типа D3 X_ω имеет в точности две открытые K-орбиты. Действительно, перестановка $w = \hat{w}_0 := w_0 v_0$ максимальна для порядка такого, что $\mathbb{O}_w \cap \sigma_0(X_0)$ непусто, следовательно, $\sigma_0^{-1}(\mathbb{O}_{\hat{w}_0})$ открыта. Перестановка $\hat{w}_0$ не имеет неподвижных точек, если $m := \frac{n}{2}$ чётное; если $m := \frac{n}{2}$ нечётное, то $\hat{w}_0$ фиксирует m и $m+1$. В первом случае $\sigma_0^{-1}(\mathbb{O}_{\hat{w}_0}) = \mathcal{O}^{-1,1}_{(\hat{w}_0,\emptyset)}$ — единая K-орбита, и $\tilde{I}(\mathcal{O}^{-1,1}_{(\hat{w}_0,\emptyset)}) = \mathcal{O}^{-1,1}_{\tilde{i}(\hat{w}_0,\emptyset)}$ — вторая открытая K-орбита. Во втором случае $\sigma_0^{-1}(\mathbb{O}_{\hat{w}_0^{(m-1)}}) = \mathcal{O}^{-1,1}_{(\hat{w}_0,\varepsilon)} \cup \mathcal{O}^{-1,1}_{(\hat{w}_0,\tilde{\varepsilon})}$, где $(\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}) = (\tilde{\varepsilon}_{m+1}, \tilde{\varepsilon}_m) = (+1,-1)$, это объединение двух различных K-орбит, являющихся образами друг друга под действием $\tilde{I}$.

В случае BD1 многообразие X_ω может быть разложимым, но $w = w_0^{(t)}$, для $t := \min\{p,q\}$, это единственный максимальный элемент в $\mathfrak{S}_n$ такой, что $\mathbb{O}_w \cap \sigma_0(X_0)$ непусто. Тогда $\sigma_0^{-1}(\mathbb{O}_w)$ состоит из единой $\tilde{I}$-инвариантной открытой K-орбиты, обозначаемой $\mathcal{O}^{1,1}_{(w_0^{(t)},\varepsilon)}$ для $\varepsilon \equiv \mathrm{sign}(p-q)$. Следовательно многообразие флагов X_ω имеет единственную открытую орбиту K-орбиту (которая несвязана в случае, когда n чётное).

Замечание 5. (Замкнутые K-орбиты.) Мы будем использовать обозначения из замечаний 3–4. Как видно из предложений 4–6, в каждом случае можно найти единственную перестановку $w_{\min} \in \mathfrak{S}_n$ такую, что $\mathbb{O}_{w_{\min}} \cap \sigma_0(X_0)$ замкнуто; в самом деле, $w_{\min} = \mathrm{id}$ кроме типа BD1 для p,q нечётных: в этом случае$w_{\min} = (\frac{n}{2}; \frac{n}{2}+1)$. Для каждой K-орбиты $\mathcal{O} \subset X_0$ имеет место следующая эквивалентность:

$$\mathcal{O} \text{ замкнута} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_0(\mathcal{O}) \subset \mathbb{O}_{w_{\min}}$$

(см. [3, 18]). Ввиду этой эквивалентности, мы получаем следующий полный список замкнутых K-орбит X_0 для разных типов. Для типов A1 и A2, $\mathcal{O}_{w_0}$ — единственная замкнутая K-орбита. Для типа A3 замкнутые K-орбиты суть в точности орбиты $\mathcal{O}_{(\mathrm{id},\varepsilon)}$ для всех пар вида $(\mathrm{id},\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p,q)$; существует $\binom{n}{p}$ таких орбит. Для типов B, C, D, замкнутые K-орбиты это орбиты $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(\mathrm{id},\varepsilon)}$ для всех пар вида $(\mathrm{id},\varepsilon) \in \mathfrak{I}^{\eta,\epsilon}_n(p,q)$, кроме случая BD1, при условии $n =: 2m$ чётное и p,q нечётные; в этом случае замкнутые K-орбиты это орбиты $\mathcal{O}^{1,1}_{((m;m+1),\varepsilon)}$ для всех пар вида $((m;m+1),\varepsilon) \in \mathfrak{I}^{1,1}_n(p,q)$. Существует $\binom{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + \lfloor \frac{q}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$ замкнутых орбит в случаях BD1 и C2, и $2^{\frac{n}{2}}$ замкнутых орбит для типов C1 и D3.

Замечание 6. Предложения 4–6 показывают, в частности, что *специальные элементы* X_0, в понимании Мацуки [11, 12], суть в точности флаги $\mathcal{F} \in X_0$ вида $\mathcal{F} = \mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n)$, где $(v_1, \ldots, v_n)$ — одновременно двойственный и сопряжённый базис пространства V, относительно некоторой инволюции $w \in \mathfrak{I}_n^\epsilon$ для типов A1 и A2, и некоторой инволюции со знаками $(w, \varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p,q)$ для типов A3, B–D. В самом деле, согласно [11, 12], множество $\mathcal{S} \subset X_0$ специальных элементов совпадает с

$$\bigcup_{\mathcal{O} \in X_0/K} \mathcal{O} \cap \Xi(\mathcal{O}),$$

где отображение $X_0/K \to X_0/G^0$, $\mathcal{O} \mapsto \Xi(\mathcal{O})$ это двойственность Мацуки.

3.5. **Доказательства.**

Доказательство предложения 4 (a). Мы будем писать $w = (a_1; b_1) \cdots (a_m; b_m)$ с $a_1 < \ldots < a_m$ и $a_k < b_k$ для всех k; положим $c_1 < \ldots < c_{n-2m}$ будут элементами множества $\{k : w_k = k\}$. Для типа A2 мы имеем $n = 2m$, и $(e_1, \ldots, e_n)$ есть одновременно $(1;2)(3;4) \cdots (n-1;n)$-двойственный базис и $(1;2)(3;4) \cdots (n-1;n)$-сопряжённый базис; тогда базис $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, где

$$e'_{a_\ell} = e_{2\ell-1} \quad \text{и} \quad e'_{b_\ell} = e_{2\ell} \quad \text{для всех } \ell \in \{1, \ldots, m\},$$

является одновременно w-двойственным и w-сопряжённым. Для типа A1, заменяя e_ℓ и e_{ℓ^*} на $\frac{e_\ell + e_{\ell^*}}{\sqrt{2}}$ и $\frac{e_\ell - e_{\ell^*}}{i\sqrt{2}}$ в тех случаях, когда $\ell < \ell^*$, мы можем считать, что базис $(e_1, \ldots, e_n)$ одновременно id-двойственен и id-сопряжён. Для всех $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ и $k \in \{1, \ldots, n-2m\}$,

$$e'_{a_\ell} = \frac{e_{2\ell-1} + ie_{2\ell}}{\sqrt{2}}, \quad e'_{b_\ell} = \frac{e_{2\ell-1} - ie_{2\ell}}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad e'_{c_k} = e_{2m+k}.$$

Тогда $(e'_1, \ldots, e'_n)$ — одновременно w-двойственный и w-сопряжённый базис. В обоих случаях мы заключаем, что

(10)
$$\emptyset \neq \{\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n) : (v_1, \ldots, v_n) \text{ — } w\text{-двойственный и } w\text{-сопряжённый}\} \subset \mathcal{O}_w \cap \mathfrak{O}_w.$$

Теперь проверим обратное включение. Предположим, что $\mathcal{F} = (F_0, \ldots, F_n) \in \mathcal{O}_w \cap \mathfrak{O}_w$. Пусть $(v_1, \ldots, v_n)$ — w-двойственный базис такой, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n)$. Поскольку $\mathcal{F} \in \mathfrak{O}_w$, мы имеем

$$w_k = \min\{\ell = 1, \ldots, n : \gamma(F_k) \cap F_\ell \neq \gamma(F_{k-1}) \cap F_\ell\}. \tag{11}$$

Для всех $\ell \in \{0, \ldots, n\}$ мы построим w-двойственный базис $(v_1^{(\ell)}, \ldots, v_n^{(\ell)})$ в V такой, что

$$F_k = \langle v_1^{(\ell)}, \ldots, v_k^{(\ell)} \rangle_{\mathbb{C}} \quad \text{для всех } k \in \{1, \ldots, n\} \tag{12}$$

и

$$\gamma(v_k^{(\ell)}) = \begin{cases} \epsilon v_{w_k}^{(\ell)}, & \text{если } w_k \geq k, \\ v_{w_k}^{(\ell)}, & \text{если } w_k < k \end{cases} \quad \text{для всех } k \in \{1, \ldots, \ell\}. \tag{13}$$

Это будет означать, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}(v_1^{(n)}, \ldots, v_n^{(n)})$ для базиса $(v_1^{(n)}, \ldots, v_n^{(n)})$ одновременно w-двойственного и w-сопряжённого, то есть, полностью докажет (a).

Наша конструкция будет строиться по индукции, начиная с $(v_1^{(0)}, \ldots, v_n^{(0)}) = (v_1, \ldots, v_n)$. Пусть $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, и предположим, что базис $(v_1^{(\ell-1)}, \ldots, v_n^{(\ell-1)})$ построен. Мы выделяем три случая.

Случай 1: $w_\ell < \ell$.

Неравенство $w_\ell < \ell = w(w_\ell)$ влечёт $\gamma(v_{w_\ell}^{(\ell-1)}) = \epsilon v_\ell^{(\ell-1)}$, откуда $\gamma(v_\ell^{(\ell-1)}) = v_{w_\ell}^{(\ell-1)}$, так как $\gamma^2 = \epsilon\mathrm{id}$. Поэтому базис $(v_1^{(\ell)}, \dots, v_n^{(\ell)}) := (v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_n^{(\ell-1)})$ удовлетворяет условиям (12) и (13).

Случай 2: $w_\ell = \ell$.

Этот случай имеет место только для типа A1. С одной стороны, (11) даёт

$$\gamma(v_\ell^{(\ell-1)}) \in \langle v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_\ell^{(\ell-1)}, v_{w_1}^{(\ell-1)}, \dots, v_{w_{\ell-1}}^{(\ell-1)} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

С другой стороны, так как базис $(v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_n^{(\ell-1)})$ является w-двойственным, мы получаем

$$v_\ell^{(\ell-1)} \in \langle v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_{\ell-1}^{(\ell-1)}, v_{w_1}^{(\ell-1)}, \dots, v_{w_{\ell-1}}^{(\ell-1)} \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}.$$

Следовательно, поскольку γ сохраняет ортогональность по отношению к форме ω, то

$$\begin{aligned} \gamma(v_\ell^{(\ell-1)}) &\in \langle \gamma(v_1^{(\ell-1)}), \dots, \gamma(v_{\ell-1}^{(\ell-1)}), \gamma(v_{w_1}^{(\ell-1)}), \dots, \gamma(v_{w_{\ell-1}}^{(\ell-1)}) \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp} \\ &= \langle v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_{\ell-1}^{(\ell-1)}, v_{w_1}^{(\ell-1)}, \dots, v_{w_{\ell-1}}^{(\ell-1)} \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}. \end{aligned}$$

Всё это вместе указывает на существование ненулевого комплексного числа λ такого, что $\gamma(v_\ell^{(\ell-1)}) = \lambda v_\ell^{(\ell-1)}$. Так как γ — инволюция, мы заключаем, что $\lambda \in \{+1, -1\}$. В дополнение мы знаем, что

$$\lambda = \omega(\gamma(v_\ell^{(\ell-1)}), v_\ell^{(\ell-1)}) = {}^t\overline{v_\ell^{(\ell-1)}} v_\ell^{(\ell-1)} \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно $\gamma(v_\ell^{(\ell-1)}) = v_\ell^{(\ell-1)}$, и мы можем положить

$$(v_1^{(\ell)}, \dots, v_n^{(\ell)}) := (v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_n^{(\ell-1)}).$$

Случай 3: $w_\ell > \ell$.

Из (11) мы получаем

$$\gamma(v_\ell^{(\ell-1)}) \in \langle v_k^{(\ell-1)} : 1 \le k \le w_\ell \rangle_{\mathbb{C}} + \langle v_{w_k}^{(\ell-1)} : 1 \le k \le \ell - 1 \rangle_{\mathbb{C}}.$$

С другой стороны, рассуждая, как и в случае 2, мы видим, что

$$\gamma(v_\ell^{(\ell-1)}) \in \langle v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_{\ell-1}^{(\ell-1)}, v_{w_1}^{(\ell-1)}, \dots, v_{w_{\ell-1}}^{(\ell-1)} \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp}.$$

Поэтому выполняется равенство

$$\gamma(v_\ell^{(\ell-1)}) = \sum_{k \in I} \lambda_k v_k^{(\ell-1)} \quad \text{для некоторых } \lambda_k \in \mathbb{C}\,, \tag{14}$$

где $I := \{k : \ell \le k \le w_\ell \text{ and } \ell \le w_k\} \subset \hat{I} := \{k : \ell \le k \text{ and } \ell \le w_k\}$. Используя (14), факт, что базис $(v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_n^{(\ell-1)})$ w-двойственен, и определения ω и γ, мы видим, что

$$\lambda_{w_\ell} = \omega(v_\ell^{(\ell-1)}, \gamma(v_\ell^{(\ell-1)})) = \epsilon\, {}^t v_\ell^{(\ell-1)} \overline{v_\ell^{(\ell-1)}} = \epsilon\alpha, \tag{15}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Положим

$$v_\ell^{(\ell)} := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} v_\ell^{(\ell-1)}, \quad v_{w_\ell}^{(\ell)} := \frac{\epsilon}{\sqrt{\alpha}} \gamma(v_\ell^{(\ell-1)}),$$

$$v_k^{(\ell)} := v_k^{(\ell-1)} - \frac{\omega(v_k^{(\ell-1)}, \gamma(v_\ell^{(\ell-1)}))}{\lambda_{w_\ell}} v_\ell^{(\ell-1)} \text{ для всех } k \in \hat{I} \setminus \{\ell, w_\ell\},$$

$$v_k^{(\ell)} := v_k^{(\ell-1)} \text{ для всех } k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \hat{I}.$$

Основываясь на равенствах (14) и (15), легко проверить, что $(v_1^{(\ell)}, \ldots, v_n^{(\ell)})$ является w-двойственным базисом, удовлетворяющим (12) и (13). Это завершает рассмотрение случая 3. □

Доказательство предложений 4 (b)–(d). Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_w$, то есть, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n)$ для некоторого w-двойственного базиса $(v_1, \ldots, v_n)$ в V. Из определения w-двойственного базиса мы видим, что

$$\begin{aligned} \langle v_1, \ldots, v_{n-k} \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp} &= \langle v_j : w_j \notin \{1, \ldots, n-k\} \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle v_j : w_j \in \{n-k+1, \ldots, n\} \rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \langle v_j : (w_0 w)_j \in \{1, \ldots, k\} \rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\dim \langle v_1, \ldots, v_{n-k} \rangle_{\mathbb{C}}^{\perp} \cap \langle v_1, \ldots, v_\ell \rangle_{\mathbb{C}} = \left| \{ j \in \{1, \ldots, \ell\} : (w_0 w)_j \in \{1, \ldots, k\} \} \right|$$

для всех $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, что даёт равенство $w(\mathcal{F}^\perp, \mathcal{F}) = w_0 w$, и поэтому включение

$$\mathcal{O}_w \subset \{\mathcal{F} \in X : (\mathcal{F}^\perp, \mathcal{F}) \in \mathbb{O}_{w_0 w}\}. \tag{16}$$

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n) \in \mathfrak{O}_w$ для w-сопряжённого базиса $(v_1, \ldots, v_n)$ в V. Из определения w-сопряжённого базиса мы получаем

$$\gamma(\langle v_1, \ldots, v_k \rangle_{\mathbb{C}}) = \langle v_{w_j} : j \in \{1, \ldots, k\} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Поэтому

$$\dim \gamma(\langle v_1, \ldots, v_k \rangle_{\mathbb{C}}) \cap \langle v_1, \ldots, v_\ell \rangle_{\mathbb{C}} =$$

$$\left| \{ j \in \{1, \ldots, \ell\} : w_j^{-1} \in \{1, \ldots, k\} \} \right|$$

для всех $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, откуда $w(\gamma(\mathcal{F}), \mathcal{F}) = w^{-1} = w$ (где w — инволюция). Это влечёт включение

$$\mathfrak{O}_w \subset \{\mathcal{F} \in X : (\gamma(\mathcal{F}), \mathcal{F}) \in \mathbb{O}_w\}. \tag{17}$$

Ясно, что группа K действует транзитивно на множестве w-двойственных базисов, следовательно, $\mathcal{O}_w$ является K-орбитой. Более того, (16) влечёт то, что орбиты $\mathcal{O}_w$ (для $w \in \mathfrak{I}_w^\epsilon$) попарно различны. Аналогично, подмножества $\mathfrak{O}_w$ (для $w \in \mathfrak{I}_w^\epsilon$) суть попарно различные G^0-орбиты.

Обозначим через L_k матрицу размера $k \times k$ с 1 на антидиагонали и 0 в остальных местах. Пусть $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ является w_0-двойственным базисом, другими словами,

$$\begin{cases} \omega(v_k, v_{n+1-k}) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \leq \frac{n+1}{2} \\ \epsilon, & \text{если } k > \frac{n+1}{2} \end{cases} \\ \omega(v_k, v_\ell) = 0, \quad \text{если } \ell \neq n+1-k; \end{cases}$$

поэтому $L := (\omega(v_k, v_\ell))_{1\le k,\ell\le n}$ это следующая матрица:

$$L = L_n \quad (\text{тип A1}) \quad \text{или} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & L_m \\ -L_m & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{тип A2}, \ n = 2m).$$

Флаг $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n)$ удовлетворяет условию $\mathcal{F}_0^\perp = \mathcal{F}_0$. По Ричардсону-Спрингеру [18] каждая K-орбита $\mathcal{O} \subset X$ содержит элемент вида $g\mathcal{F}_0$ с $g \in G$ такой, что $h := L^t[g]_{\underline{v}} L^{-1}[g]_{\underline{v}} \in N$, где $[g]_{\underline{v}}$ обозначает матрицу g в базисе $\underline{v}$ и N обозначает группу обратимых $n \times n$-матриц с ровно одним ненулевым коэффициентом в каждой строке и кажом столбце. Заметим, что матрица $Lh = {}^t[g]_{\underline{v}} L [g]_{\underline{v}}$ тоже принадлежит N (так же, как и L) и является симметрической в случае A1 и антисимметрической в случае A2. Вследствие этого, существует $w \in \mathfrak{I}_n$ и константы $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}^*$ такие, что матрица $Lh =: (a_{k,\ell})_{1\le k,\ell\le n}$ состоит из коэффициентов:

$$a_{k,\ell} = 0, \text{ если } \ell \neq w_k, \qquad a_{k,w_k} = \begin{cases} t_k, & \text{если } w_k \geq k \\ \epsilon t_k, & \text{если } w_k \leq k. \end{cases}$$

Так как $\epsilon = -1$ для типа A2, должно выполняться $w_k \neq k$ для всех k, поэтому $w \in \mathfrak{I}'_n$. Следовательно, в обоих случаях $w \in \mathfrak{I}^\epsilon_n$. Для всех $k \in \{1, \ldots, n\}$, мы выберем $s_k = s_{w_k} \in \mathbb{C}^*$ такие, что $s_k^{-2} = t_k$ (отметим, что $t_{w_k} = t_k$). Таким образом,

$$g\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(s_1 g v_1, \ldots, s_n g v_n)\,,$$

и для всех $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ мы имеем

$$\omega(s_k g v_k, s_\ell g v_\ell) = s_k s_\ell \omega(g v_k, g v_\ell) = s_k s_\ell a_{k,\ell} = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell = w_k \geq k \\ \epsilon, & \text{если } \ell = w_k < k \\ 0, & \text{если } \ell \neq w_k. \end{cases}$$

Поэтому $g\mathcal{F}_0 \in \mathcal{O}_w$. Это даёт $\mathcal{O} = \mathcal{O}_w$.

Мы доказали, что подмножества $\mathcal{O}_w$ (для $w \in \mathfrak{I}^\epsilon_w$) суть в точности K-орбиты в X. В частности, $X = \bigcup_{w\in\mathfrak{I}^\epsilon_w} \mathcal{O}_w$ так, что включение (16) на самом деле является равенством. По двойственности Мацуки число G^0-орбит в X равно числу K-орбит, поэтому подмножества $\mathfrak{O}_w$ (для $w \in \mathfrak{I}^\epsilon_w$) суть в точности G^0-орбиты в X. Тем самым в (17) имеет место равенство. Таким образом, мы доказали части (b) и (c) утверждения.

Из части (a) следует что, для каждого $w \in \mathfrak{I}^\epsilon_n$, пересечение $\mathcal{O}_w \cap \mathfrak{O}_w$ непусто и состоит из единой $K \cap G^0$-орбиты. Это показывает, что орбита $\mathfrak{O}_w$ двойственна по Мацуки орбите $\mathcal{O}_w$ (см. [12]), и часть (d) утверждения также доказана. □

Доказательство предложения 5 (a). Мы представим w в виде произвдения попарно коммутирующих транспозиций $w = (a_1; b_1) \cdots (a_m; b_m)$, и пусть $c_{m+1} < \ldots < c_p$ — элементы в $\{k : w_k = k, \ \varepsilon_k = +1\}$ и $d_{m+1} < \ldots < d_q$ - элементы в $\{k : w_k = k, \ \varepsilon_k = -1\}$. Представим $\{e_1, \ldots, e_n\} = \{e_1^+, \ldots, e_p^+\} \cup \{e_1^-, \ldots, e_q^-\}$ так, чтобы $V_+ = \langle e_\ell^+ : \ell = 1, \ldots, p\rangle_\mathbb{C}$ и $V_- = \langle e_\ell^- : \ell = 1, \ldots, q\rangle_\mathbb{C}$. Полагая

$$v_{a_k} := \tfrac{e_k^+ + e_k^-}{\sqrt{2}}\,, \quad v_{b_k} := \tfrac{e_k^+ - e_k^-}{\sqrt{2}} \quad \text{для всех } k \in \{1, \ldots, m\},$$

$$v_{c_k} := e_k^+ \quad \text{для всех } k \in \{m+1, \ldots, p\}, \quad \text{и} \quad v_{d_k} := e_k^- \quad \text{для всех } k \in \{m+1, \ldots, q\},$$

легко видеть, что $(v_1, \ldots, v_n)$ — (w, ε)-двойственный и (w, ε)-сопряжённый базис в V. Следовательно

$$\emptyset \neq \{\mathcal{F}(\underline{v}) : \underline{v} \ (w, \varepsilon)\text{-двойственен и } (w, \varepsilon)\text{-сопряжён}\} \subset \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}. \tag{18}$$

Чтобы показать обратное включение, рассмотрим $\mathcal{F} = (F_0, \dots, F_n) \in \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$. С одной стороны, так как $\mathcal{F} \in \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$, существует (w,ε)-двойственный базис $(v_1, \dots, v_n)$ такой, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}(v_1, \dots, v_n)$. С другой стороны, то, что $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}$ влечёт

$$w_k = \min\{\ell = 1, \dots, n : \delta(F_k) \cap F_\ell \neq \delta(F_{k-1}) \cap F_\ell\} \quad \text{для всех } k \in \{1, \dots, n\}. \tag{19}$$

Для всех $\ell \in \{0, \dots, n\}$ мы построим (w,ε)-двойственный базис $(v_1^{(\ell)}, \dots, v_n^{(\ell)})$ такой, что

$$F_k = \langle v_1^{(\ell)}, \dots, v_k^{(\ell)} \rangle_{\mathbb{C}} \quad \text{для всех } k \in \{1, \dots, n\} \tag{20}$$

$$\text{и} \quad \delta(v_k^{(\ell)}) = \begin{cases} v_{w_k}^{(\ell)}, & \text{если } w_k \neq k, \\ \varepsilon_k v_k^{(\ell)}, & \text{если } w_k = k \end{cases} \quad \text{для всех } k \in \{1, \dots, \ell\}. \tag{21}$$

Это даст нам базис $(v_1^{(n)}, \dots, v_n^{(n)})$, являющийся одновременно (w,ε)-двойственным и (w,ε)-сопряжённым и таким, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}(v_1^{(n)}, \dots, v_n^{(n)})$, и, таким образом, завершит доказательство части (a).

Построение будет посредством индукции по $\ell \in \{0, \dots, n\}$, с базой индукции $(v_1^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}) := (v_1, \dots, v_n)$. Предположим, что для $\ell \in \{1, \dots, n\}$ базис $(v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_n^{(\ell-1)})$ уже построен. Мы различаем три случая.

Случай 1: $w_\ell < \ell$.

Поскольку в этом случае $w_\ell \leq \ell - 1$ и $w(w_\ell) = \ell$, мы получаем $\delta(v_{w_\ell}^{(\ell-1)}) = v_\ell^{(\ell-1)}$ и поэтому $\delta(v_\ell^{(\ell-1)}) = v_{w_\ell}^{(\ell-1)}$ (так как δ инволюция). Поэтому базис $(v_1^{(\ell)}, \dots, v_n^{(\ell)}) := (v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_n^{(\ell-1)})$ удовлетворяет условиям (20) и (21).

Случай 2: $w_\ell = \ell$.

Используя (19), мы получаем

$$\delta(v_\ell^{(\ell-1)}) \in \langle v_1^{(\ell-1)}, v_2^{(\ell-1)}, \dots, v_\ell^{(\ell-1)} \rangle_{\mathbb{C}} + \langle v_{w_1}^{(\ell-1)}, \dots, v_{w_{\ell-1}}^{(\ell-1)} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

С другой стороны, из того, что базис $(v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_n^{(\ell-1)})$ (w,ε)-сопряжён следует

$$v_\ell^{(\ell-1)} \in \langle v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_{\ell-1}^{(\ell-1)}, v_{w_1}^{(\ell-1)}, \dots, v_{w_{\ell-1}}^{(\ell-1)} \rangle_{\mathbb{C}}^{\dagger}. \tag{22}$$

Поскольку δ сохраняет ортогональность по отношению к форме ϕ, и $\delta(v_k^{(\ell-1)}) = v_{w_k}^{(\ell-1)}$ для всех $k \in \{1, \dots, \ell-1\}$ (по предположению индукции), (22) влечёт

$$\delta(v_\ell^{(\ell-1)}) \in \langle v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_{\ell-1}^{(\ell-1)}, v_{w_1}^{(\ell-1)}, \dots, v_{w_{\ell-1}}^{(\ell-1)} \rangle_{\mathbb{C}}^{\dagger}.$$

В итоге мы получаем

$$\delta(v_\ell^{(\ell-1)}) = \lambda v_\ell^{(\ell-1)} \quad \text{для некоторого } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Так как δ — инволюция, мы заключаем, что $\lambda \in \{+1, -1\}$. Далее, из того, что $\phi(v_\ell^{(\ell-1)}, v_\ell^{(\ell-1)}) = \varepsilon_\ell$ вытекает

$$\lambda \varepsilon_\ell = \phi(v_\ell^{(\ell-1)}, \delta(v_\ell^{(\ell-1)})) = {}^t\overline{v_\ell^{(\ell-1)}} \Phi \Phi v_\ell^{(\ell-1)} = {}^t\overline{v_\ell^{(\ell-1)}} v_\ell^{(\ell-1)} \geq 0.$$

Наконец, мы получаем $\lambda = \varepsilon_\ell$. Отсюда следует, что базис $(v_1^{(\ell)}, \dots, v_n^{(\ell)}) := (v_1^{(\ell-1)}, \dots, v_n^{(\ell-1)})$ удовлетворяет (20) и (21).

Случай 3: $w_\ell > \ell$.

Вспоминая (19), тот факт, что $(v_1^{(\ell-1)}, \ldots, v_n^{(\ell-1)})$ (w,ε)-двойственен, предположение индукции и факт, что δ сохраняет ортогональность по отношению к форме ϕ, мы получаем, как и в случае 2 ,

$$\begin{aligned}\delta(v_\ell^{(\ell-1)}) \quad \in \quad & \big(\langle v_k^{(\ell-1)} : 1 \le k \le w_\ell\rangle_{\mathbb{C}} + \langle v_{w_k}^{(\ell-1)} : 1 \le k \le \ell-1\rangle_{\mathbb{C}}\big) \\ & \cap \langle v_1^{(\ell-1)}, \ldots, v_{\ell-1}^{(\ell-1)}, v_{w_1}^{(\ell-1)}, \ldots, v_{w_{\ell-1}}^{(\ell-1)}\rangle_{\mathbb{C}}^\dagger .\end{aligned}$$

Следовательно

$$\delta(v_\ell^{(\ell-1)}) = \sum_{k\in I} \lambda_k v_k^{(\ell-1)} \quad \text{с } \lambda_k \in \mathbb{C}, \tag{23}$$

где $I := \{k : \ell \le k \le w_\ell,\ \ell \le w_k\} \subset \hat{I} := \{k : \ell \le k,\ \ell \le w_k\}$. Это влечёт

$$\lambda_{w_\ell} = \phi(v_\ell^{(\ell-1)}, \delta(v_\ell^{(\ell-1)})) = {}^t\overline{v_\ell^{(\ell-1)}} \Phi\Phi v_\ell^{(\ell-1)} = {}^t\overline{v_\ell^{(\ell-1)}} v_\ell^{(\ell-1)} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Нетрудно проверить, что базис $(v_1^{(\ell)}, \ldots, v_n^{(\ell)})$, определённый как

$$\begin{aligned} & v_\ell^{(\ell)} := \frac{1}{\sqrt{\lambda_{w_\ell}}} v_\ell^{(\ell-1)}, \quad v_{w_\ell}^{(\ell)} := \frac{1}{\sqrt{\lambda_{w_\ell}}} \delta(v_\ell^{(\ell-1)}), \\ & v_k^{(\ell)} := v_k^{(\ell-1)} - \frac{\phi(v_k^{(\ell-1)}, \delta(v_\ell^{(\ell-1)}))}{\lambda_{w_\ell}} v_\ell^{(\ell-1)} \quad \text{для всех } k \in \hat{I} \setminus \{\ell, w_\ell\}, \\ & v_k^{(\ell)} := v_k^{(\ell-1)} \quad \text{для всех } k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \hat{I}, \end{aligned}$$

является (w,ε)-двойственным и удовлетворяет условиям (20) и (21). □

Доказательство предложения 5 (b)–(d). Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n)$, где $(v_1, \ldots, v_n)$ — (w,ε)-сопряжённый базис. Тогда, по определению, мы имеем

$$\delta(\langle v_1, \ldots, v_k\rangle_{\mathbb{C}}) = \langle v_{w_j} : j \in \{1, \ldots, k\}\rangle_{\mathbb{C}}\,,$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\dim \delta(\langle v_1, \ldots, v_k\rangle_{\mathbb{C}}) \cap \langle v_1, \ldots, v_\ell\rangle_{\mathbb{C}} \quad &= \quad |\{j \in \{1, \ldots, \ell\} : w_j^{-1} \in \{1, \ldots, k\}\}| \\ &= \quad |\{j \in \{1, \ldots, \ell\} : w_j \in \{1, \ldots, k\}\}|\end{aligned}$$

для всех $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$. Далее, для $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ мы получаем

$$\begin{aligned}\langle v_1, \ldots, v_\ell\rangle_{\mathbb{C}} \cap \ker(\delta - \varepsilon \mathrm{id}) \quad = \quad & \langle v_j : 1 \le w_j = j \le \ell \text{ и } \varepsilon_j = \varepsilon\rangle_{\mathbb{C}} \\ & + \langle v_j + \varepsilon v_{w_j} : 1 \le w_j < j \le \ell\rangle_{\mathbb{C}}\,.\end{aligned}$$

Следовательно

$$\big(\dim\langle v_1, \ldots, v_\ell\rangle_{\mathbb{C}} \cap V_+, \dim\langle v_1, \ldots, v_\ell\rangle_{\mathbb{C}} \cap V_-\big)_{\ell=1}^n = \varsigma(w,\varepsilon).$$

В итоге это даёт включение

$$\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \subset \big\{\mathcal{F} \in X : (\delta(\mathcal{F}), \mathcal{F}) \in \mathbb{O}_w \text{ и } \varsigma(\delta : \mathcal{F}) = \varsigma(w,\varepsilon)\big\}. \tag{24}$$

Теперь пусть $(v_1, \ldots, v_n)$ — (w,ε)-двойственный базис. Тогда

$$\begin{aligned}\langle v_1, \ldots, v_{n-k}\rangle_{\mathbb{C}}^\dagger \cap \langle v_1, \ldots, v_\ell\rangle_{\mathbb{C}} \quad &= \quad \langle v_j : j \in \{1, \ldots, \ell\} \text{ и } w_j > n-k\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= \quad \langle v_j : j \in \{1, \ldots, \ell\} \text{ и } (w_0 w)_j \le k\rangle_{\mathbb{C}}\,,\end{aligned}$$

откуда

$$\dim\langle v_1, \ldots, v_{n-k}\rangle_{\mathbb{C}}^\dagger \cap \langle v_1, \ldots, v_\ell\rangle_{\mathbb{C}} = |\{j \in \{1, \ldots, \ell\} : (w_0 w)_j \in \{1, \ldots, k\}|$$

для всех $k,\ell \in \{1,\dots,n\}$. В частности, мы видим, что

$$\langle v_1,\dots,v_\ell\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v_1,\dots,v_\ell\rangle_{\mathbb{C}} \cap \langle v_1,\dots,v_\ell\rangle_{\mathbb{C}}^{\dagger} \oplus \langle v_j : j \in \{1,\dots,\ell\} \text{ и } w_j \leq \ell\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Это влечёт, что векторы v_j (для $1 \leq w_j = j \leq \ell$) и $\frac{1}{\sqrt{2}}(v_j \pm v_{w_j})$ (для $1 \leq w_j < j \leq \ell$) составляют базис факторпространства $\langle v_1,\dots,v_\ell\rangle_{\mathbb{C}}/\langle v_1,\dots,v_\ell\rangle_{\mathbb{C}} \cap \langle v_1,\dots,v_\ell\rangle_{\mathbb{C}}^{\dagger}$. Этот базис ϕ-ортогонален и, поскольку $(v_1,\dots,v_n)$ (w,ε)-двойственен, мы имеем

$$\phi(v_j,v_j) = \varepsilon_j, \text{ если } w_j = j; \quad \begin{cases} \phi\left(\frac{v_j+v_{w_j}}{\sqrt{2}}, \frac{v_j+v_{w_j}}{\sqrt{2}}\right) = 1, \\ \phi\left(\frac{v_j-v_{w_j}}{\sqrt{2}}, \frac{v_j-v_{w_j}}{\sqrt{2}}\right) = -1 \end{cases} \text{ если } w_j < j.$$

Поэтому сигнатура ϕ на $\langle v_1,\dots,v_\ell\rangle_{\mathbb{C}}/\langle v_1,\dots,v_\ell\rangle_{\mathbb{C}} \cap \langle v_1,\dots,v_\ell\rangle_{\mathbb{C}}^{\dagger}$ это пара

$$\begin{aligned}\Big(\quad & |\{j : w_j = j \leq \ell,\ \varepsilon_j = +1\}| + |\{j : w_j < j \leq \ell\}|, \\ & |\{j : w_j = j \leq \ell,\ \varepsilon_j = -1\}| + |\{j : w_j < j \leq \ell\}| \quad \Big),\end{aligned}$$

которая совпадает с ℓ-ым элементом последовательности $\varsigma(w,\varepsilon)$. Наконец, мы получаем включение

$$\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)} \subset \big\{\mathcal{F} \in X : (\mathcal{F}^{\dagger},\mathcal{F}) \in \mathbb{O}_{w_0 w} \text{ и } \varsigma(\phi : \mathcal{F}) = \varsigma(w,\varepsilon)\big\}. \tag{25}$$

Ясно, что K (соответственно, G^0) действует транзитивно на множестве (w,ε)-сопряжённых базисов (соответственно, (w,ε)-двойственных базисов). Поэтому подмножества $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}$ (соответственно, $\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$) суть K-орбиты (соответственно, G^0-орбиты). Далее, принимая во внимание (24) и (25) мы видим, что эти орбиты попарно различны.

Пусть $\mathcal{O}$ это K-орбита в X. Отметим, что базис $(e_1,\dots,e_n)$ в V удовлетворяет $\delta(e_j) = \pm e_j$ для всех j, следовательно, флаг $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}(e_1,\dots,e_n)$ удовлетворяет $\delta(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_0$. Из [18] следует, что K-орбита $\mathcal{O}$ содержит элементы вида $g\mathcal{F}_0$ для некоторого $g \in G$ такого, что $h := \Phi g^{-1}\Phi g \in N$ где, как и в доказательстве предложения 4, $N \subset G$ обозначает подгруппу матриц с ровно одним ненулевым коэффициентом в каждой строке и каждом столбце. Так как $\Phi \in N$, то тоже $\Phi h \in N$. Следовательно существует перестановка $w \in \mathfrak{S}_n$ и константы $t_1,\dots,t_n \in \mathbb{C}^*$ такие, что матрица $\Phi h =: \big(a_{k,\ell}\big)_{1\leq k,\ell\leq n}$ составлена из

$$a_{k,\ell} = 0, \quad \text{если } \ell \neq w_k, \quad a_{k,w_k} = t_k \qquad \text{для всех } k,\ell \in \{1,\dots,n\}.$$

Соотношение $\Phi h = g^{-1}\Phi g$ показывает, что $(\Phi h)^2 = 1_n$. Это даёт $w^2 = \mathrm{id}$ и $t_k t_{w_k} = 1$ для всех k; поэтому

$$t_{w_k} = t_k^{-1} \ \text{ при } w_k \neq k \quad \text{и} \quad \varepsilon_k := t_k \in \{+1,-1\} \ \text{ при } w_k = k.$$

В дополнение, поскольку матрица Φh сопряжена матрице Φ, её собственные значения $+1$ и -1 имеют соответственно кратности p и q, откуда

$$(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p,q).$$

Для каждого $k \in \{1,\dots,n\}$ с $w_k < k$, мы выберем $s_k \in \mathbb{C}^*$ так, чтобы $t_k = s_k^2$, и положим $s_{w_k} = s_k^{-1}$ (так, чтобы $s_{w_k}^2 = t_k^{-1} = t_{w_k}$). Далее, для каждого $k \in \{1,\dots,n\}$ с $w_k = k$, положим $s_k = 1$. Равенство $\Phi g = g\Phi h$ даёт

$$\delta(g(s_k e_k)) = s_k \Phi g e_k = s_k g(\Phi h) e_k = s_k g(t_{w_k} e_{w_k}) = s_{w_k}^{-1} g(s_{w_k}^2 e_{w_k}) = g(s_{w_k} e_{w_k})$$

для всех $k \in \{1,\dots,n\}$ таких, что $w_k \neq k$, и

$$\delta(g(s_k e_k)) = \delta(g(e_k)) = \Phi g e_k = g(\Phi h) e_k = g(\varepsilon_k e_k) = \varepsilon_k g(e_k) = \varepsilon_k g(s_k e_k)$$

для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $w_k = k$. Следовательно, множество $(g(s_1e_1), \dots, g(s_ne_n))$ является (w,ε)-сопряжённым базисом в V. Таким образм

$$g\mathcal{F}_0 = g\mathcal{F}(e_1, \dots, e_n) = g\mathcal{F}(s_1e_1, \dots, s_ne_n) = \mathcal{F}(g(s_1e_1), \dots, g(s_ne_n)) \in \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}.$$

Следовательно $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}$.

Мы заключаем, что подмножества $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}$ (для $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p,q)$) суть в точности K-орбиты в X. Тогда из двойственности Мацуки вытекает, что подмножества $\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$ (для $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p,q)$) являются в точности G^0-орбитами в X. Этот факт влечёт, в частности, что (24) и (25) на самом деле являются равенствами. В итоге мы доказали части (b) и (c) утверждения.

Наконец, часть (a) показывет, что для каждой $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p,q)$ пересечение $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$ состоит из единой $K \cap G^0$-орбиты, и откуда следует, что орбиты $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}$ и $\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$ двойственны по Мацуки (см. [11, 12]). Это доказывает часть (d) утверждения. Доказательство предложения 5 закончено. □

Доказательство предложения 6. Доказательство опирается на следующие два технических утверждения.

Утверждение 1: Для каждой инволюции со знаками $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p,q)$ мы имеем $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega = \emptyset$, если $(w,\varepsilon) \notin \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p,q)$.

Утверждение 2: Для каждой инволюции со знаками $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p,q)$ есть базис $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$, являющийся одновременно (w,ε)-двойственным и (w,ε)-сопряжённым, и удовлетворяющим (9).

Опираясь на утверждения 1 и 2, продолжим доказательство. Для каждой $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p,q)$ включения

$$\{\mathcal{F}(\underline{v}) : \underline{v}\ (w,\varepsilon)\text{-сопряжён и удовлетворяет (9)}\} \subset \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega, \tag{26}$$

$$\{\mathcal{F}(\underline{v}) : \underline{v}\ (w,\varepsilon)\text{-двойственен и удовлетворяет (9)}\} \subset \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega, \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\{\mathcal{F}(\underline{v}) : \underline{v}\ (w,\varepsilon)\text{-двойственен и } (w,\varepsilon)\text{-сопряжён и удовлетворяет} \\ \text{условию (9) }\} \\ \subset \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega\end{gathered} \tag{28}$$

очевидно выполняются. Поэтому утверждение 2 показывает, что $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$, $\mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$, и $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)} \cap \mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$ все непусты, когда $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p,q)$. По утверждению 1, лемме 1, и предложению 5 (c), K-орбиты в X_ω суть в точности подмножества $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$. С другой стороны, подмножества $\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega$ (для $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p,q)$) G^0-инвариантны и попарно различны. По двойственности Мацуки существует биекция между K-орбитами и G^0-орбитами. Это заставляет $\mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)} = \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega$ быть единой G^0-орбитой при $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p,q)$, и $\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega$ быть пустым при $(w,\varepsilon) \notin \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p,q)$. Это доказывает предложение 6 (b).

Поскольку орбиты $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}, \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)} \subset X$ двойственны по Мацуки (см. предложение 5 (d)), их пересечение $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$ компактно, поэтому то же верно для всех пересечений $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)} \cap \mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$ при $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p,q)$. Это влечёт то, что $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$ и $\mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$ двойственны по Мацуки (см. [6]), и, соответственно, выполнение части (c) утверждения .

Пусть $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p,q)$. Поскольку орбиты $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$ и $\mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)}$ двойственны по Мацуки, их пересечение — единая $K \cap G^0$-орбита. Множество в левой части (28) непусто (по утверждению 2) и $K \cap G^0$-инвариантно, поэтому равенство из (28) выполнено. По аналогии, множества в левых частях (26) и (27) непусты (по утверждению 2) и, соответственно, K- и G^0-инвариантны. Поскольку $\mathcal{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)} = \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega$ и $\mathfrak{O}^{\eta,\epsilon}_{(w,\varepsilon)} = \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega$ являются, соответственно, K-орбитой и G^0-орбитой, мы получаем, что (26) и (27) суть равенства. Это показывает часть (a) утверждения.

Таким образом, доказательство предложения 6 будет завершено, когда мы установим утверждения 1 и 2.

Доказательства утверждения 1. Заметим, что для двух подпространств $A, B \subset V$ мы имеем $A^\perp + B^\perp = (A \cap B)^\perp$, поэтому

$$\dim A^\perp \cap B^\perp + \dim A + \dim B = \dim A \cap B + \dim V. \tag{29}$$

Заметим также, что отображение δ самосопряжено (для типов BD1 и C2) или антисамосопряжено (для типов C1 и D3) по отношению к форме ω, поэтому равенство $\delta(A)^\perp = \delta(A^\perp)$ выполняется для любого подпространства $A \subset V$ и для всех типов.

Пусть $(w, \varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p, q)$ такая, что $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega \neq \emptyset$. Положим $\mathcal{F} = (F_0, \ldots, F_n) \in \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \cap X_\omega$.

Применяя (29) к $A = \delta(F_k)$ и $B = F_\ell$ для $1 \leq k, \ell \leq n$, получаем

$$\dim \delta(F_{n-k}) \cap F_{n-\ell} + k + \ell = \dim \delta(F_k) \cap F_\ell + n. \tag{30}$$

С другой стороны, поскольку $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}$, предложение 5 (b) даёт

$$\dim \delta(F_{n-k}) \cap F_{n-\ell} = |\{j = 1, \ldots, n-\ell : 1 \leq w_j \leq n-k\}| \tag{31}$$

и

$$\begin{aligned} \dim \delta(F_k) \cap F_\ell &= |\{j = 1, \ldots, \ell : 1 \leq w_j \leq k\}| \\ &= \ell - |\{j = 1, \ldots, \ell : w_j \geq k+1\}| \\ &= \ell - (n - k - |\{j \geq \ell + 1 : w_j \geq k+1\}|) \\ &= \ell + k - n + |\{j = 1, \ldots, n-\ell : w_0 w w_0(j) \leq n-k\}| \end{aligned} \tag{32}$$

для всех $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$. Сравнивая (30)–(32), мы заключаем, что $w = w_0 w w_0$.

Пусть $k \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $w_k = k$. Поскольку $w w_0 = w_0 w$, мы имеем $w_{n-k+1} = n - k + 1$. Применяя (29) для $A = F_k$ (соответственно, $A = F_{k-1}$) и $B = V_+$, мы получаем

$$1 + \dim F_{k-1} \cap V_+ - \dim F_k \cap V_+ = \dim F_{n-k+1} \cap V_- - \dim F_{n-k} \cap V_-$$

для типов BD1 и C2 (где $V_+^\perp = V_-$), откуда

$$\begin{aligned} \varepsilon_k = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \dim F_k \cap V_+ = \dim F_{k-1} \cap V_+ + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \dim F_{n-k+1} \cap V_- = \dim F_{n-k} \cap V_- \Leftrightarrow \varepsilon_{n-k+1} = 1 \end{aligned}$$

в этом случае. Для типов C1 и D3 (где $V_+^\perp = V_+$), мы получаем

$$1 + \dim F_{k-1} \cap V_+ - \dim F_k \cap V_+ = \dim F_{n-k+1} \cap V_+ - \dim F_{n-k} \cap V_+ \,,$$

откуда также

$$\varepsilon_k = 1 \Leftrightarrow \varepsilon_{n-k+1} = -1 \,.$$

На этом этапе мы получаем, что инволюция со знаками (w, ε) удовлетворяет условиям (i)–(ii) из раздела 3.3. Чтобы заключить, что $(w, \varepsilon) \in \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p, q)$, остаётся проверить, что для типов C2 и D3 мы имеем $w_k \neq n - k + 1$ при всех $k \leq \frac{n}{2}$. Рассуждая от противного, предположим, что $w_k = n - k + 1$. Поскольку $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}$, то существует (w, ε)-сопряжённый базис $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ такой, что

$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\underline{v})$. Таким образом, $\delta(v_k) = v_{n-k+1}$ и мы можем написать $v_k = v_k^+ + v_k^-$ и $v_{n-k+1} = v_k^+ - v_k^-$. Для типа C2 мы имеем $V_+^\perp = V_-$ и ω антисимметрична, поэтому

$$\omega(v_k^+ + v_k^-, v_k^+ - v_k^-) = \omega(v_k^+, v_k^+) - \omega(v_k^-, v_k^-) = 0 - 0 = 0.$$

Для типа D3 мы имеем $V_+^\perp = V_+$, $V_-^\perp = V_-$, и ω симметрична, и поэтому

$$\omega(v_k^+ + v_k^-, v_k^+ - v_k^-) = -\omega(v_k^+, v_k^-) + \omega(v_k^-, v_k^+) = 0.$$

В обоих случаях мы выводим

$$F_{n-k+1} = F_{n-k} + \langle v_{n-k+1}\rangle_{\mathbb{C}} \subset F_k^\perp + F_{k-1}^\perp \cap \langle v_k\rangle_{\mathbb{C}}^\perp = F_k^\perp = F_{n-k},$$

что есть противоречие. Этим завершается доказательство утверждения 1.

Доказательство утверждения 2. Для $k \in \{1, \ldots, n\}$ положим $k^* = n - k + 1$. Запишем ω как

$$w = (c_1; c_1') \cdots (c_s; c_s')(c_1'^*; c_1^*) \cdots (c_s'^*; c_s^*)(d_1; d_1^*) \cdots (d_t; d_t^*),$$

где $c_1 < \ldots < c_s < c_s^* < \ldots < c_1^*$, $c_j < c_j' \neq c_j^*$ для всех j, $d_1 < \ldots < d_t < d_t^* < \ldots < d_1^*$. Отметим, что $t = 0$ для типов C2 и D3. Далее, мы обозначим

$$\{a_1 < \ldots < a_{p-t-2s}\} := \{k : w_k = k,\ \varepsilon_k = 1\},$$
$$\{b_1 < \ldots < b_{q-t-2s}\} := \{k : w_k = k,\ \varepsilon_k = -1\}.$$

Зафиксируем ϕ-ортонормальный базис V_+

$$x_1^+, \ldots, x_t^+, y_1^+, \ldots, y_s^+, y_s^{+*}, \ldots, y_1^{+*}, z_1^+, \ldots, z_{p-t-2s}^+$$

и $(-\phi)$-ортонормальный базис V_-

$$x_1^-, \ldots, x_t^-, y_1^-, \ldots, y_s^-, y_s^{-*}, \ldots, y_1^{-*}, z_1^-, \ldots, z_{q-t-2s}^-,$$

такие, что в случаях BD1 и C2 (где ограничение ω на V_+ и V_- невырождено) имеем

$$\omega(x_j^+, x_j^+) = \omega(x_j^-, x_j^-) = 1,$$
$$\omega(y_j^+, y_j^{+*}) = \omega(y_j^-, y_j^{-*}) = 1, \quad \omega(y_j^{+*}, y_j^+) = \omega(y_j^{-*}, y_j^-) = \epsilon,$$
$$\omega(z_j^+, z_\ell^+) = \begin{cases} 1, & \text{если } j \le \ell = p - t - 2s + 1 - j \\ \epsilon, & \text{если } j > \ell = p - t - 2s + 1 - j, \end{cases}$$
$$\omega(z_j^-, z_\ell^-) = \begin{cases} 1, & \text{если } j \le \ell = q - t - 2s + 1 - j \\ \epsilon, & \text{если } j > \ell = q - t - 2s + 1 - j, \end{cases}$$

и остальные значения ω на базисе равны 0. Для типов C1 и D3 (где $V_+^\perp = V_+$, $V_-^\perp = V_-$, и, в частности, $p = q = \frac{n}{2}$ в этом случае) мы требуем, чтобы

$$\omega(x_j^+, x_j^-) = i, \quad \omega(x_j^-, x_j^+) = \epsilon i,$$
$$\omega(y_j^+, y_j^{-*}) = \omega(y_j^-, y_j^{+*}) = 1, \quad \omega(y_j^{+*}, y_j^-) = \omega(y_j^{-*}, y_j^+) = \epsilon,$$
$$\omega(z_j^+, z_\ell^-) = \epsilon\omega(z_\ell^-, z_j^+) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell = \tilde{j} := \frac{n}{2} - t - 2s + 1 - j \text{ и } a_j < b_{\tilde{j}} \\ \epsilon, & \text{если } \ell = \tilde{j} := \frac{n}{2} - t - 2s + 1 - j \text{ и } a_j > b_{\tilde{j}}, \end{cases}$$

и чтобы остальные значения ω на базисе были равны 0. В отличие от значений $\omega(z_j^\pm, z_\ell^\pm)$ в случаях BD1,C2, значения $\omega(z_j^+, z_\ell^-)$ в случаях C1,D3 не подлежат ограничанию но выбраны так, чтобы базис $(v_1, \ldots, v_n)$ ниже удовлетворял (9).

Во всех случаях мы строим базис $(v_1, \ldots, v_n)$ следующим образом

$$v_{d_j} = \frac{x_j^+ + ix_j^-}{\sqrt{2}}, \quad v_{d_j^*} = \frac{x_j^+ - ix_j^-}{\sqrt{2}},$$

$$v_{c_j} = \frac{y_j^+ + y_j^-}{\sqrt{2}}, \quad v_{c'_j} = \frac{y_j^+ - y_j^-}{\sqrt{2}}, \quad v_{c_j^*} = \frac{y_j^{+*} + y_j^{-*}}{\sqrt{2}}, \quad v_{c_j'^*} = \frac{y_j^{+*} - y_j^{-*}}{\sqrt{2}},$$

$$v_{a_j} = z_j^+, \quad \text{и} \quad v_{b_j} = z_j^-.$$

Просто проверить, что базис $(v_1, \ldots, v_n)$ является одновременно (w, ε)-двойственным и (w, ε)-сопряжённым и, что он удовлетворяет (9). Это завершает доказательство утверждения 2. □

4. Двойственность орбит в инд-многообразиях обобщённых флагов

Следуя схеме раздела 3, мы теперь изложим наши результаты о двойственности орбит в бесконечномерном случае. Все доказательства представлены в разделе 4.5.

4.1. **Типы A1 и A2.** Обозначения такие же, как в разделе 2.1.1. Для каждого $\ell \in \mathbb{N}^*$ существует единственное $\ell^* \in \mathbb{N}^*$ такое, что $\omega(e_\ell, e_{\ell^*}) \neq 0$, и это даёт биекцию $\iota : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $\ell \mapsto \ell^*$.

Обозначим через $\mathfrak{I}_\infty(\iota)$ - множество инволлюций $w : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ таких, что $w(\ell) = \ell^*$ для всех кроме конечного числа $\ell \in \mathbb{N}^*$. В частности, мы имеем $w\iota \in \mathfrak{S}_\infty$ для всех $w \in \mathfrak{I}_\infty(\iota)$. Пусть $\mathfrak{I}'_\infty(\iota) \subset \mathfrak{I}_\infty(\iota)$ — подмножество инволюций без неподвижных точек (то есть, таких, что $w(\ell) \neq \ell$ для всех $\ell \in \mathbb{N}^*$).

Пусть $\sigma : \mathbb{N}^* \to (A, \prec)$ — биекция на полностью упорядоченное множество, и рассмотрим инд-многообразие обобщённых флагов $\mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$. В предложении 7 ниже мы покажем, что $\mathbf{K}$-орбиты и $\mathbf{G}^0$-орбиты в $\mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$ параметризуются элементами $\mathfrak{I}_\infty(\iota)$ для типа A1, и элементами $\mathfrak{I}'_\infty(\iota)$ для типа A2.

Определение 6. Пусть $w \in \mathfrak{I}_\infty(\iota)$. И $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots)$ — базис $\mathbf{V}$ такой, что

$$v_\ell = e_\ell \quad \text{для всех кроме конечного числа } \ell \in \mathbb{N}^*. \tag{33}$$

Назовём $\underline{v}$ *w-двойственным*, если в дополнение к (33) $\underline{v}$ удовлетворяет

$$\omega(v_\ell, v_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ell \neq w_k, \\ \pm 1, & \text{если } \ell = w_k \end{cases} \quad \text{для всех } k, \ell \in \mathbb{N}^*,$$

и назовём $\underline{v}$ *w-сопряжённым*, если в дополнение к (33)

$$\gamma(v_k) = \pm v_{w_k} \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}^*.$$

Положим $\boldsymbol{\mathcal{O}}_w := \{\mathcal{F}_\sigma(\underline{v}) : \underline{v} — w\text{-двойственный}\}$ и $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_w := \{\mathcal{F}_\sigma(\underline{v}) : \underline{v} — w\text{-сопряжённый}\}$, где $\boldsymbol{\mathcal{O}}_w$ и $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_w$ — подмножества инд-многообразия $\mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$.

Обозначения. (a) Мы будем использовать сокращенное обозначение $\mathbf{X} := \mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$.
(b) Если $\mathcal{F}$ — обобщённый флаг слабо согласованный с E, то $\mathcal{F}^\perp := \{F^\perp : F \in \mathcal{F}\}$ также является обобщённым флагом слабо согласованным с E.

Обозначим через $(A^*, \prec^*)$ полностью упорядоченное множество такое, что $A^* = A$ как множество и $a \prec^* a'$, тогда и только когда $a \succ a'$. Определим $\sigma^\perp : \mathbb{N}^* \to (A^*, \prec^*)$, полагая $\sigma^\perp(\ell) = \sigma(\ell^*)$. Тогда $\mathcal{F}_\sigma^\perp = \mathcal{F}_{\sigma^\perp}$. Отметим, что $\mathcal{F}^\perp$ — E-соизмерим с $\mathcal{F}_{\sigma^\perp}$, когда $\mathcal{F}$ — E-соизмерим с $\mathcal{F}_\sigma$. Следовательно, отображение

$$\mathbf{X} \to \mathbf{X}^\perp := \mathbf{X}(\mathcal{F}_{\sigma^\perp}, E), \ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^\perp$$

корректно определено. Мы будем использовать сокращённое обозначение $\mathbb{O}^{\perp}_w := (\mathbb{O}_{\sigma^{\perp},\sigma})_w$ для всех $w \in \mathfrak{S}_\infty$.
(c) Заметим далее, что $\gamma(\mathcal{F}_\sigma) = \mathcal{F}_{\sigma\circ\iota}$, и что $\gamma(\mathcal{F}) \in \mathbf{X}^\gamma := \mathbf{X}(\mathcal{F}_{\sigma\circ\iota}, E)$, когда $\mathcal{F} \in \mathbf{X}$. Мы будем использовать сокращённое обозначение $\mathbb{O}^\gamma_w := (\mathbb{O}_{\sigma\circ\iota,\sigma})_w$ для всех $w \in \mathfrak{S}_\infty$.

Таким образом, $\mathbf{X}^\perp \times \mathbf{X} = \bigsqcup_{w\in\mathfrak{S}_\infty} \mathbb{O}^\perp_w$ и $\mathbf{X}^\gamma \times \mathbf{X} = \bigsqcup_{w\in\mathfrak{S}_\infty} \mathbb{O}^\gamma_w$ (см. предложение 2).

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{I}^\epsilon_\infty(\iota) = \mathfrak{I}_\infty(\iota)$ для типа A1 и $\mathfrak{I}^\epsilon_\infty(\iota) = \mathfrak{I}'_\infty(\iota)$ для типа A2.*

(a) *Для всех $w \in \mathfrak{I}^\epsilon_\infty(\iota)$, имеем*

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_w \cap \boldsymbol{\mathfrak{O}}_w = \{\mathcal{F}_\sigma(\underline{v}) : \underline{v} \text{ } w\text{-двойственен и } w\text{-сопряжён}\} \neq \emptyset.$$

(b) *Для каждого $w \in \mathfrak{I}^\epsilon_\infty(\iota)$, имеем*

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_w = \{\mathcal{F} \in \mathbf{X} : (\mathcal{F}^\perp, \mathcal{F}) \in \mathbb{O}^\perp_{w\iota}\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\mathfrak{O}}_w = \{\mathcal{F} \in \mathbf{X} : (\gamma(\mathcal{F}), \mathcal{F}) \in \mathbb{O}^\gamma_{w\iota}\}.$$

(c) *Подмножества $\boldsymbol{\mathcal{O}}_w$ (для $w \in \mathfrak{I}^\epsilon_\infty(\iota)$) суть в точности $\mathbf{K}$-орбиты в $\mathbf{X}$. Подмножества $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_w$ (для $w \in \mathfrak{I}^\epsilon_\infty(\iota)$) суть в точности $\mathbf{G}^0$-орбиты в $\mathbf{X}$. Далее, $\boldsymbol{\mathcal{O}}_w \cap \boldsymbol{\mathfrak{O}}_w$ есть единая $\mathbf{K} \cap \mathbf{G}^0$-орбита.*

4.2. **Тип A3.** Обозначения такие же, как и в разделе 2.1.2. В частности, мы фиксируем разложение $\mathbb{N}^* = N_+ \sqcup N_-$, задающее Φ как и в (3), и мы рассматриваем соответствующую Эрмитову форму ϕ и инволюцию δ на $\mathbf{V}$.

Обозначим через $\mathfrak{I}_\infty(N_+, N_-)$ множество пар (w, ε), состоящих из инволюции $w : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ и отображения $\varepsilon : \{\ell : w_\ell = \ell\} \to \{1, -1\}$ таких, что подмножества

$$N'_\pm = N'_\pm(w, \varepsilon) := \{\ell \in N_\pm : (w_\ell, \varepsilon_\ell) = (\ell, \pm 1)\}$$

удовлетворяют

$$|N_\pm \setminus N'_\pm| = |\{\ell \in N_\mp : (w_\ell, \varepsilon_\ell) = (\ell, \pm 1)\}| + \frac{1}{2}|\{\ell \in \mathbb{N}^* : w_\ell \neq \ell\}| < \infty.$$

В частности, $w \in \mathfrak{S}_\infty$.

Зафиксируем биекцию $\sigma : \mathbb{N}^* \to (A, \prec)$ на полностью упорядоченное множество. Мы покажем в предложении 8, что $\mathbf{K}$-орбиты и $\mathbf{G}^0$-орбиты инд-многообразия $\mathbf{X} := \mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$ параметризуются элементами из $\mathfrak{I}_\infty(N_+, N_-)$.

Определение 7. Пусть $(w, \varepsilon) \in \mathfrak{I}_\infty(N_+, N_-)$. Базис $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots)$ в $\mathbf{V}$ такой, что $v_\ell = e_\ell$ для всех кроме конечного множества $\ell \in \mathbb{N}^*$, назовём (w, ε)-*сопряжённым*, если

$$\delta(v_k) = \begin{cases} v_{w_k}, & \text{если } w_k \neq k, \\ \varepsilon_k v_k, & \text{если } w_k = k \end{cases} \qquad \text{для всех } k \in \mathbb{N}^*,$$

и (w, ε)-*двойственным*, если

$$\phi(v_k, v_\ell) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ell \neq w_k, \\ 1, & \text{если } \ell = w_k \neq k, \\ \varepsilon_k, & \text{если } \ell = w_k = k \end{cases} \qquad \text{для всех } k, \ell \in \mathbb{N}^*.$$

Положим $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)} := \{\mathcal{F}_\sigma(\underline{v}) : \underline{v} \text{ — } (w, \varepsilon)\text{-сопряжённый}\}$, $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)} := \{\mathcal{F}_\sigma(\underline{v}) : \underline{v} \text{ — } (w, \varepsilon)\text{-двойственный}\}$.

Примечание. (a) Заметим, что каждое подпространство в обобщённом флаге $\mathcal{F}_\sigma$ — δ-инвариантно, то есть, $\delta(\mathcal{F}_\sigma) = \mathcal{F}_\sigma$. Отображение $\mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $\mathcal{F} \mapsto \delta(\mathcal{F})$ корректно определено.
(b) Обозначим $F^\dagger = \{x \in \mathbf{V} : \phi(x,y) = 0\ \forall y \in F\}$ и $\mathcal{F}^\dagger := \{F^\dagger : F \in \mathcal{F}\}$; при этом, $\mathcal{F}^\dagger$ является обобщённым флагом слабо согласованным с E, когда это же верно для $\mathcal{F}$.

Как и в разделе 4.1, мы обозначим через $(A^*, \prec^*)$ полностью упорядочнное множество такое, что $A^* = A$ и $a \prec^* a'$, когда $a \succ a'$. Легко видеть, что $\mathcal{F}_\sigma^\dagger = \mathcal{F}_{\sigma^\dagger}$, где $\sigma^\dagger : \mathbb{N}^* \to (A^*, \prec^*)$ такое, что $\sigma^\dagger(\ell) = \sigma(\ell)$ для всех $\ell \in \mathbb{N}^*$, и поэтому мы получаем корректно определённое отображение

$$\mathbf{X} \to \mathbf{X}^\dagger := \mathbf{X}(\mathcal{F}_{\sigma^\dagger}, E),\ \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^\dagger.$$

(c) Обозначим $\mathbb{O}_w := (\mathbb{O}_{\sigma,\sigma})_w$ и $\mathbb{O}_w^\dagger := (\mathbb{O}_{\sigma^\dagger,\sigma})_w$; тогда

$$\mathbf{X} \times \mathbf{X} = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{S}_\infty} \mathbb{O}_w \quad \text{и} \quad \mathbf{X}^\dagger \times \mathbf{X} = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{S}_\infty} \mathbb{O}_w^\dagger$$

(см. предложение 2).

Предложение 8. (a) *Для каждой* $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_\infty(N_+, N_-)$ *мы имеем*

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)} \cap \boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)} = \{\mathcal{F}_\sigma(\underline{v}) : \underline{v}\ (w,\varepsilon)\text{-сопряжён и } (w,\varepsilon)\text{-двойственен}\} \neq \emptyset.$$

(b) *Пусть* $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_\infty(N_+, N_-)$ *и* $\mathcal{F} = \{F'_a, F''_a : a \in A\} \in \mathbf{X}$. *Тогда* $\mathcal{F} \in \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)}$ *(соответственно,* $\mathcal{F} \in \boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)}$*), если и только если*

$$(\delta(\mathcal{F}), \mathcal{F}) \in \mathbb{O}_w \quad (\text{соответственно, } (\mathcal{F}^\dagger, \mathcal{F}) \in \mathbb{O}_w^\dagger)$$

и для всех $\ell \in \mathbb{N}^*$ *выполнены условия*

$$\dim F''_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_\pm / F'_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_\pm = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma(w_\ell) \prec \sigma(\ell) \text{ или } (w_\ell, \varepsilon_\ell) = (\ell, \pm 1), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\mathbf{V}_\pm = \langle e_\ell : \ell \in N_\pm \rangle_\mathbb{C}$ *(соответственно, для достаточно большого* $n \in \mathbb{N}^*$

$$\varsigma(\phi : F''_{\sigma(\ell)} \cap V_n) = \varsigma(\phi : F'_{\sigma(\ell)} \cap V_n) + \begin{cases} (1,1), & \text{если } \sigma(w_\ell) \prec \sigma(\ell), \\ (1,0), & \text{если } (w_\ell, \varepsilon_\ell) = (\ell, 1), \\ (0,1), & \text{если } (w_\ell, \varepsilon_\ell) = (\ell, -1), \\ (0,0), & \text{если } \sigma(w_\ell) \succ \sigma(\ell), \end{cases}$$

где $V_n = \langle e_k : k \leq n \rangle_\mathbb{C}$ *и* $\varsigma(\phi : F)$ *обозначает сигнатуру* ϕ *на* $F/F \cap F^\dagger$*).*

(c) *Подмножества* $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)}$ *(*$(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_\infty(N_+, N_-)$*) суть в точности* $\mathbf{K}$*-орбиты в* $\mathbf{X}$. *Подмножества* $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)}$ *(*$(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_\infty(N_+, N_-)$*) суть в точности* $\mathbf{G}^0$*-орбиты в* $\mathbf{X}$. *Далее,* $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)} \cap \boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)}$ *есть единая* $\mathbf{K} \cap \mathbf{G}^0$*-орбита.*

4.3. **Типы B, C, D.** Предположим, что $\mathbf{V}$ обладает невырожденной симметрической или симплектической формой ω, определяемой матрицей Ω как и в (2). Пусть $\iota : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $\ell \mapsto \ell^*$ удовлетворяет $\omega(e_\ell, e_{\ell^*}) \neq 0$ для всех ℓ.

Зафиксируем разложение $\mathbb{N}^* = N_+ \sqcup N_-$ такое, что N_+, N_- или оба ι-инвариантны или такие, что $\iota(N_+) = N_-$. Как и ранее, пусть ϕ и δ будут соответственно Эрмитовой формой и инволюцией в $\mathbf{V}$, согласованными с этим разложением. В следующей таблице представлены различные случаи.

	ω симметрическая $\epsilon = 1$	ω симплектическая $\epsilon = -1$
$\iota(N_\pm) \subset N_\pm$ $\eta = 1$	тип BD1	тип C2
$\iota(N_\pm) = N_\mp$ $\eta = -1$	тип D3	тип C1

Обозначим через $\mathfrak{I}_\infty^{\eta,\epsilon}(N_+, N_-) \subset \mathfrak{I}_\infty(N_+, N_-)$ подмножество пар (w, ε) такое, что

(i) $\iota w = w\iota$ (поэтому множество $\{\ell : w_\ell = \ell\}$ ι-инвариантно);

(ii) $\varepsilon_{\iota(k)} = \eta\varepsilon_k$ для всех $k \in \{\ell : w_\ell = \ell\}$;

и, если $\eta\epsilon = -1$:

(iii) $w_k \neq \iota(k)$ для всех $k \in \mathbb{N}^*$.

Пусть $\mathcal{F}_\sigma$ является ω-изотропным максимальным обобщённым флагом, согласованным с E. Таким образом $\sigma : \mathbb{N}^* \to (A, \prec)$ — биекция на полностью упорядоченное множество $(A, \prec)$, обладающее (инволютивным) антиавтоморфизмом упорядоченных множеств $\iota_A : (A, \prec) \to (A, \prec)$ таким, что $\sigma\iota = \iota_A\sigma$. Следующее утверждение показывает, что $\mathbf{K}$-орбиты и $\mathbf{G}^0$-орбиты инд-многообразия $\mathbf{X}_\omega := \mathbf{X}_\omega(\mathcal{F}_\sigma, E)$ нумеруются элементами множества $\mathfrak{I}_\infty^{\eta,\epsilon}(N_+, N_-)$.

Предложение 9. *Рассмотрим базис $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots)$ в $\mathbf{V}$ такой, что*

$$\omega(v_k, v_\ell) \neq 0, \quad \text{если и только если} \quad \ell = \iota(k). \tag{34}$$

(a) *Для каждой пары $(w, \varepsilon) \in \mathfrak{I}_\infty^{\eta,\epsilon}(N_+, N_-)$ мы имеем*

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon} := \boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)} \cap \mathbf{X}_\omega = \{\mathcal{F}_\sigma(\underline{v}) : \underline{v}\ (w,\varepsilon)\text{-сопряжён и удовлетворяет (34)}\} \neq \emptyset,$$

$$\boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon} := \boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)} \cap \mathbf{X}_\omega = \{\mathcal{F}_\sigma(\underline{v}) : \underline{v}\ (w,\varepsilon)\text{-двойственен и удовлетворяет (34)}\} \neq \emptyset,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon} \cap \boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon} = \{\mathcal{F}_\sigma(\underline{v}) : \underline{v}\ (w,\varepsilon)\text{-сопряжён, } (w,\varepsilon)\text{-двойственен и удовлетворяет (34)}\} \neq \emptyset.$$

(b) *Подмножества $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon}$ $((w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_\infty^{\eta,\epsilon}(N_+, N_-))$ суть в точности $\mathbf{K}$-орбиты в $\mathbf{X}_\omega$. Подмножества $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon}$ $((w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_\infty^{\eta,\epsilon}(N_+, N_-))$ суть в точности $\mathbf{G}^0$-орбиты в $\mathbf{X}_\omega$. Далее, $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon} \cap \boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon}$ есть единая $\mathbf{K}\cap\mathbf{G}^0$-орбита.*

4.4. **Структура инд-многообразий.** В этом разделе мы напоминаем структуру инд-многообразий на $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}_\omega$, см. [4].

Напомним, что $E = (e_1, e_2, \dots)$ — (счётный) базис в $\mathbf{V}$. Зафиксируем E-соизмеримый максимальный обобщённый флаг $\mathcal{F}_\sigma$, соответствующий некоторой биекции $\sigma : \mathbb{N}^* \to (A, \prec)$ на полностью упорядоченное множество, и положим $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$.

Пусть $V_n := \langle e_1, \dots, e_n\rangle_{\mathbb{C}}$ и пусть X_n обозначает многообразие полных флагов в V_n определённых как в (6). Имеются естественные включения $V_n \subset V_{n+1}$ и

$$\mathrm{GL}(V_n) \cong \{g \in \mathrm{GL}(V_{n+1}) : g(V_n) = V_n,\ g(e_{n+1}) = e_{n+1}\} \subset \mathrm{GL}(V_{n+1}). \tag{35}$$

Зададим $\mathrm{GL}(V_n)$-эквивариантное вложение

$$\iota_n = \iota_n(\sigma) : X_n \to X_{n+1},\ (F_k)_{k=0}^n \mapsto (F'_k)_{k=0}^{n+1},$$

полагая
$$F'_k := \begin{cases} F_k & \text{, если } a_k \prec \sigma(n+1) \\ F_{k-1} \oplus \langle e_{n+1} \rangle_{\mathbb{C}} & \text{, если } a_k \succeq \sigma(n+1), \end{cases}$$
где $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_{n+1}$ — элементы множества $\{\sigma(\ell) : 1 \leq \ell \leq n+1\}$, записанные в порядке возрастания. Таким образом, мы имеем цепь вложений (являющихся морфизмами алгебраических многообразий)
$$\cdots \hookrightarrow X_{n-1} \overset{\iota_{n-1}}{\hookrightarrow} X_n \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} X_{n+1} \overset{\iota_{n+1}}{\hookrightarrow} \cdots,$$
и $\mathbf{X}$ получается как прямой предел
$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E) = \varinjlim X_n.$$
В частности, для каждого n мы получаем вложение $\hat{\iota}_n : X_n \hookrightarrow \mathbf{X}$, и, отождествляя X_n со своим образом в $\mathbf{X}$, мы можем представить $\mathbf{X}$ в виде объединения $\mathbf{X} = \bigcup_{n \geq 1} X_n$. При этом, каждый обобщённый флаг $\mathcal{F} \in \mathbf{X}$ принадлежит всем X_n, начиная с некоторого номера $n_{\mathcal{F}}$. Например, $\mathcal{F}_\sigma \in X_n$ для всех $n \geq 1$.

Базис $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ в V_n может быть дополнен до базиса в $\mathbf{V}$, обозначаемого $\underline{\hat{v}} := (v_1, \ldots, v_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots)$ так, что

$$\hat{\iota}_n(\mathcal{F}(v_{\tau_1}, \ldots, v_{\tau_n})) = \mathcal{F}_\sigma(\underline{\hat{v}}) \tag{36}$$

(в обозначениях из разделов 2.2–2.3), где $\tau = \tau^{(n)} \in \mathfrak{S}_n$ — перестановка такая, что $\sigma(\tau_1^{(n)}) \prec \ldots \prec \sigma(\tau_n^{(n)})$.

Напомним, что инд-топология на $\mathbf{X}$ определяется объявлением подмножества $\mathbf{Z} \subset \mathbf{X}$ открытым (соответственно, замкнутым), если каждое пересечение $\mathbf{Z} \cap X_n$ открыто (соответственно, замкнуто).

Ясно, что структура инд-многообразия на $\mathbf{X}$ не меняется, если последовательность $(X_n, \iota_n)_{n \geq 1}$ заменить на подпоследовательность $(X_{n_k}, \iota'_k)_{k \geq 1}$, где $\iota'_k := \iota_{n_{k+1}-1} \circ \cdots \circ \iota_{n_k}$.

Для типа A3 (используя обозначения из раздела 2.1) подпространство $V_n \subset \mathbf{V}$ обладает ограничениями ϕ и δ , поэтому мы можем определить $K_n, G_n^0 \subset \mathrm{GL}(V_n)$ как в разделе 3.2 и с условием, чтобы включения в (35) задавали естественные включения $K_n \subset K_{n+1}$ и $G_n^0 \subset G_{n+1}^0$.

Далее предположим, что пространство $\mathbf{V}$ обладает невырожденной симплектической или симметрической формой ω определяемой матрицей Ω из (2). Блоки $J_1, J_2, \ldots$ в матрице Ω имеют размер 1 или 2. Зададим $n_k := |J_1| + \ldots + |J_k|$ так, чтобы ограничение ω на каждое подпространство V_{n_k} было невырождено. Поэтому для типов A1, A2, BD1, C1, C2, и D3 мы можем определить подгруппы $K_{n_k}, G_{n_k}^0 \subset \mathrm{GL}(V_{n_k})$ как в разделе 3 и так, чтобы включения в (35) задавали естественные включения
$$K_{n_k} \subset K_{n_{k+1}} \quad \text{и} \quad G_{n_k}^0 \subset G_{n_{k+1}}^0.$$

Далее, подмногообразие $(X_{n_k})_\omega \subset X_{n_k}$ изотропных флагов (относительно формы ω) может быть определено как и в (7). Для ω-изотропного обобщённого флага $\mathcal{F}_\sigma$ включение $\iota'_k : X_{n_k} \hookrightarrow X_{n_{k+1}}$ отображает $(X_{n_k})_\omega$ в $(X_{n_{k+1}})_\omega$, и мы имеем
$$\mathbf{X}_\omega = \mathbf{X}_\omega(\mathcal{F}_\sigma, E) = \bigcup_{k \geq 1} (X_{n_k})_\omega \quad \text{и} \quad (X_{n_k})_\omega = \mathbf{X}_\omega \cap X_{n_k} \text{ для всех } k \geq 1.$$
В частности, $\mathbf{X}_\omega$ — замкнутое инд-подмногообразие $\mathbf{X}$ (как утверждалось в предложении 3).

4.5. **Доказательства.**

Доказательство предложения 7. Пусть $\mathcal{F} = \{F'_a, F''_a : a \in A\} = \mathcal{F}_\sigma(\underline{v})$ для базиса $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots)$ в $\mathbf{V}$. Пусть $w \in \mathfrak{I}^\epsilon_\infty(\iota)$. Если базис $\underline{v}$ является w-двойственным, то

$$(F'_a)^\perp = \langle v_\ell : \sigma(w_\ell) \succeq a\rangle_\mathbb{C} \quad \text{и} \quad (F''_a)^\perp = \langle v_\ell : \sigma(w_\ell) \succ a\rangle_\mathbb{C}\,,$$

поэтому $\mathcal{F}^\perp = \mathcal{F}_{\sigma^\perp \iota w}(\underline{v})$; это даёт $(\mathcal{F}^\perp, \mathcal{F}) \in \mathbb{O}^\perp_{w\iota}$. Если $\underline{v}$ — w-сопряжённый, то

$$\gamma(F'_a) = \langle v_\ell : \sigma(w_\ell) \prec a\rangle_\mathbb{C} \quad \text{и} \quad \gamma(F''_a) = \langle v_\ell : \sigma(w_\ell) \preceq a\rangle_\mathbb{C}\,,$$

следовательно $\gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_{\sigma w}(\underline{v})$ и $(\gamma(\mathcal{F}), \mathcal{F}) \in \mathbb{O}^\gamma_{w\iota}$. Это доказывает включение в предложении 7 (b). Отметим что эти включения указывают, в частности, на то, что подмножества $\boldsymbol{\mathcal{O}}_w$, так же как и $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_w$, попарно различны.

Для $w \in \mathfrak{I}^\epsilon_{n_k}$ мы определим $\hat{w} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ следующим образом:

$$\hat{w}(\ell) = \begin{cases} \tau w \tau^{-1}(\ell), & \text{если } \ell \leq n_k, \\ \iota(\ell), & \text{если } \ell \geq n_k + 1, \end{cases}$$

где $\tau = \tau^{(n_k)} : \{1, \dots, n_k\} \to \{1, \dots, n_k\}$ — перестановка такая, что $\sigma(\tau_1) \prec \ldots \prec \sigma(\tau_{n_k})$. Легко видеть, что мы получаем корректно определённое (инъективное) отображение $j_k : \mathfrak{I}^\epsilon_{n_k} \to \mathfrak{I}^\epsilon_\infty(\iota)$, $j_k(w) := \hat{w}$, и

$$\mathfrak{I}^\epsilon_\infty(\iota) = \bigcup_{k \geq 1} j_k(\mathfrak{I}^\epsilon_{n_k}). \tag{37}$$

Далее, если дан базис $\underline{v} = (v_1, \dots, v_{n_k})$ в V_{n_k} и базис $\hat{\underline{v}}$ в $\mathbf{V}$, получаемый добавлением векторов e_ℓ для $\ell \geq n_k + 1$, то импликация

(38) $(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_{n_k}})$ — w-двойственный (соответственно, w-сопряжённый)
$\Rightarrow$ $\hat{\underline{v}}$ — $\hat{w}$-двойственный (соответственно, $\hat{w}$-сопряжённый)

очевидно следует из нашей конструкции. Отметим, что

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\hat{w}} \cap X_{n_k} = \mathcal{O}_w \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\mathfrak{O}}_{\hat{w}} \cap X_{n_k} = \mathfrak{O}_w, \tag{39}$$

где $\mathcal{O}_w, \mathfrak{O}_w \subset X_{n_k}$ — орбиты из определения 4; в самом деле, включения $\supset$ в (39) следуют из (36) и (38), в то время как включения $\subset$ следуют из предложения 4 (c) и факта, что подмножества $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{\hat{w}}$, так же как и $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_{\hat{w}}$, попарно различны. Части (a) и (c) предложения 7 теперь следуют из (37)–(39) и предложения 4 (a), (c). Из предложения 7 (a) мы выводим, что равенства в предложениях 7 (b) справедливы, и завершаем доказательство. $\square$

Доказательство предложения 8. Для каждого $n \geq 1$ положим $p_n = |N_+ \cap \{1, \dots, n\}|$ и $q_n = |N_- \cap \{1, \dots, n\}|$.

Пусть $\mathcal{F} = \{F'_a, F''_a : a \in A\} = \mathcal{F}_\sigma(\underline{v})$ для некоторого базиса $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots)$ $\mathbf{V}$. Пусть $(w, \varepsilon) \in \mathfrak{I}_\infty(N_+, N_-)$. Если $\underline{v}$ (w, ε)-сопряжён, то

$$\delta(F'_a) = \langle v_\ell : \sigma(w_\ell) \prec a\rangle_\mathbb{C} \quad \text{и} \quad \delta(F''_a) = \langle v_\ell : \sigma(w_\ell) \preceq a\rangle_\mathbb{C}$$

так, что $(\delta(\mathcal{F}),\mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{\sigma w}(\underline{v}),\mathcal{F}_{\sigma}(\underline{v})) \in \mathbb{O}_w$. Далее,

$$\begin{cases} F''_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_+ / F'_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_+ = \langle v_\ell \rangle_{\mathbb{C}},\ F''_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_- = F'_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_- & \text{, если } (w_\ell,\varepsilon_\ell) = (\ell,+1), \\ F''_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_- / F'_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_- = \langle v_\ell \rangle_{\mathbb{C}},\ F''_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_+ = F'_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_+ & \text{, если } (w_\ell,\varepsilon_\ell) = (\ell,-1), \\ F''_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_+ / F'_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_+ = \langle v_\ell + v_{w_\ell} \rangle_{\mathbb{C}}, & \\ \qquad F''_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_- / F'_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_- = \langle v_\ell - v_{w_\ell} \rangle_{\mathbb{C}} & \text{, если } \sigma(w_\ell) \prec \sigma(\ell), \\ F''_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_+ = F'_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_+,\ F''_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_+ = F'_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_+ & \text{, если } \sigma(w_\ell) \succ \sigma(\ell), \end{cases}$$

что доказывает формулу для $\dim F''_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_\pm / F'_{\sigma(\ell)} \cap \mathbf{V}_\pm$ из предложения 8 (b). Если $\underline{v}$ (w,ε)-двойственен, то мы получаем одновременно

$$(F'_a)^\dagger = \langle v_\ell : \sigma(w_\ell) \succeq a \rangle_{\mathbb{C}} \quad \text{и} \quad (F''_a)^\dagger = \langle v_\ell : \sigma(w_\ell) \succ a \rangle_{\mathbb{C}}\,.$$

Поэтому $(\mathcal{F}^\dagger,\mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{\sigma^\dagger w}(\underline{v}),\mathcal{F}_{\sigma}(\underline{v})) \in \mathbb{O}_w^\dagger$. Для достаточно большого $n \geq 1$ мы имеем $(w_\ell,\varepsilon_\ell) = (\ell,\pm 1)$ для всех $\ell \in N_\pm \cap \{n+1,n+2,\ldots\}$ и $v_\ell = e_\ell$ для всех $\ell \geq n+1$. Таким образом, пара $(\breve{w},\breve{\varepsilon}) := (w|_{\{1,\ldots,n\}},\varepsilon|_{\{1,\ldots,n\}})$ принадлежит $\mathfrak{I}_n(p_n,q_n)$, в то время как согласно (36) имеем

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(v_{\tau_1},\ldots,v_{\tau_n}).$$

Базис $(v_{\tau_1},\ldots,v_{\tau_n})$ в V_n $(\tau^{-1}\breve{w}\tau,\breve{\varepsilon}\tau)$-двойственен, если $\underline{v}$ (w,ε)-двойственен; последняя формула в предложении 8 (b) теперь следует из предложения 5 (b) и данного наблюдения. В итоге, это доказывает условие необходимости в предложении 8 (b), которое гарантирует, в частности, что подмножества $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)}$, так же как и подмножества $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)}$, попарно различны. Достаточность в предложении 8 (b) получится как только мы докажем предложение 8 (a).

Для $(w,\varepsilon) \in \mathfrak{I}_n(p_n,q_n)$ положим

$$\hat{w}(\ell) = \begin{cases} \tau w \tau^{-1}(\ell) & \text{, если } \ell \leq n, \\ \ell & \text{, если } \ell \geq n+1 \end{cases} \qquad \text{для всех } \ell \in \mathbb{N}^*, \tag{40}$$

где $\tau = \tau^{(n)} \in \mathfrak{S}_n$ как и в (36), и

$$\hat{\varepsilon}(\ell) = \begin{cases} \varepsilon\tau^{-1}(\ell) & \text{, если } \ell \leq n, \\ 1 & \text{, если } \ell \geq n+1,\ n \in N_+, \\ -1 & \text{, если } \ell \geq n+1,\ n \in N_- \end{cases} \tag{41}$$

для всех $\ell \in \mathbb{N}^*$ таких, что $\hat{w}_\ell = \ell$. Легко проверить, что $(\hat{w},\hat{\varepsilon}) \in \mathfrak{I}_\infty(N_+,N_-)$, и, что полученное таким образом отображение $j_n : \mathfrak{I}_n(p_n,q_n) \to \mathfrak{I}_\infty(N_+,N_-)$ инъективно и

$$\mathfrak{I}_\infty(N_+,N_-) = \bigcup_{n\geq 1} j_n(\mathfrak{I}_n(p_n,q_n)).$$

Более того, из нашего построения следует, что, если дан базис в $\underline{v} = (v_1,\ldots,v_n)$ в V_n и базис $\underline{\hat{v}}$ в $\mathbf{V}$ получается добавлением векторов e_ℓ для $\ell \geq n+1$, то верна импликация:

$$\begin{gathered}(v_{\tau_1},\ldots,v_{\tau_n}) \text{ — } (w,\varepsilon)\text{-сопряжённый (соответственно, двойственный)} \\ \Rightarrow\ \underline{\hat{v}} \text{ — } (\hat{w},\hat{\varepsilon})\text{-сопряжённый (соответственно, двойственный).}\end{gathered}$$

Как и в доказательстве предложения 7 мы получаем равенства

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(\hat{w},\hat{\varepsilon})} \cap X_n = \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(\hat{w},\hat{\varepsilon})} \cap X_n = \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}, \tag{42}$$

где $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)},\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)} \subset X_n$ как и в определении 5. Части (a) и (c) предложения 8 тогда следуют из предложений 5 (a) и (c). $\square$

Доказательство предложения 9. Пусть $n \in \{n_1, n_2, \dots\}$ (где $n_k = |J_1| + \ldots + |J_k|$ как и ранее) и $(p_n, q_n) = (|N_+ \cap \{1,\dots,n\}|, |N_- \cap \{1,\dots,n\}|)$ и пусть $\tau = \tau^{(n)} : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ — перестановка такая, что $\sigma(\tau_1) \prec \ldots \prec \sigma(\tau_n)$. Поскольку обобщённый флаг $\mathcal{F}_\sigma$ ω-изотропен, должно быть выполнено

$$\iota(\tau_\ell) = \tau_{n-\ell+1} \quad \text{для всех } \ell \in \{1,\dots,n\}.$$

Это наблюдение легко влечёт то, что отображение j_n определённое в доказательстве предложения 8 ограничивается до корректно определённого инъективного отображения

$$j_n : \mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p_n, q_n) \to \mathfrak{I}_\infty^{\eta,\epsilon}(N_+, N_-)$$

такого, что

$$\mathfrak{I}_\infty^{\eta,\epsilon}(N_+, N_-) = \bigcup_{k \geq 1} j_{n_k}(\mathfrak{I}_{n_k}^{\eta,\epsilon}(p_{n_k}, q_{n_k})).$$

Из (42) для $(\hat{w}, \hat{\varepsilon}) = j_n(w, \varepsilon)$ мы получаем

$$\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(\hat{w},\hat{\varepsilon})}^{\eta,\epsilon} \cap (X_n)_\omega = \mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(\hat{w},\hat{\varepsilon})}^{\eta,\epsilon} \cap (X_n)_\omega = \mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon}. \tag{43}$$

Предложение 9 легко следует из этого факта и предложения 6. □

5. Следствия

Следствие 1. *Отображение двойственности Ξ из теоремы 1 (b) зависит от выбора $\mathbf{G}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{G}^0$, но не от выбора базиса E, используемого выше в построении $\mathbf{G}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{G}^0$. В частности, Ξ не зависит от исчерпания $\mathbf{X} = \bigcup_{n \geq 1} X_n$, определяемого E и упоминемого в теореме 1 (b).*

Доказательство. Утверждение следует сразу из коммутативности диаграммы (1) и из наблюдения, что, если $\mathbf{X} = \bigcup_{n \geq 1} X_n$ и $\mathbf{X} = \bigcup_{n' \geq 1} X'_{n'}$, суть два исчерпания инд-многообразия $\mathbf{X}$, то, для любых n_0 и n'_0 существуют n_1 и n'_1 такие, что $X_{n_0} \cup X'_{n'_0} \subset X_{n_1}$ и $X_{n_0} \cup X'_{n'_0} \subset X'_{n'_1}$. □

Второе следствие утверждает, что параметризация $\mathbf{K}$- и $\mathbf{G}^0$-орбит на $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ на самом деле зависит только от тройки $(\mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{G}^0)$, но не зависит от выбора инд-многообразия $\mathbf{G}/\mathbf{B}$.

Следствие 2. *Пусть $E, \mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{G}^0$ — такие же, как в разделе 2.1. Пусть $\mathcal{F}_{\sigma_j}$ ($j = 1, 2$) — два E-соизмеримых максимальных обобщённых флага, которые ω-изотропны для типов B,C,D, и пусть $\mathbf{X}_j = \mathbf{G}/\mathbf{B}_{\mathcal{F}_{\sigma_j}}$. Тогда существуют естественные биекции*

$$\mathbf{X}_1/\mathbf{K} \cong \mathbf{X}_2/\mathbf{K} \quad \text{и} \quad \mathbf{X}_1/\mathbf{G}^0 \cong \mathbf{X}_2/\mathbf{G}^0,$$

которые коммутируют с двойственностью из теоремы 1.

Далее, прямой подсчёт параметров даёт:

Следствие 3. *В следствии 2 множества орбит $\mathbf{X}_j/\mathbf{K}$ и $\mathbf{X}_j/\mathbf{G}^0$ всегда бесконечны.*

Важно отметить, что, несмотря на следствие 2, топологические свойства орбит на $\mathbf{G}/\mathbf{B}$ не одинаковы для различных Борелевских инд-подгрупп $\mathbf{B} \subset \mathbf{G}$. Следующее следствие устанавливает критерии для существования открытых и замкнутых орбит на $\mathbf{G}/\mathbf{B} = \mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$.

Следствие 4. *Пусть $E, \mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{G}^0$ — такие, как в разделе 2.1, и пусть $\mathcal{F}_\sigma$ — E-соизмеримый максимальный обобщённый флаг, ω-изотропный для типов B,C,D, где $\sigma : \mathbb{N}^* \to (A, \prec)$ — биекция на полностью упорядоченное множество. Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{G}/\mathbf{B}_{\mathcal{F}_\sigma}$; то есть, $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathcal{F}_\sigma, E)$ для типа A, и $\mathbf{X} = \mathbf{X}_\omega(\mathcal{F}_\sigma, E)$ для типов B,C,D.*

- (a_1) *Для типа A1, $\mathbf{X}$ обладает открытой $\mathbf{K}$-орбитой (эквивалентно, замкнутой $\mathbf{G}^0$-орбитой), если и только если $\iota(\ell) = \ell$ для всех $\ell \gg 1$ (то есть, если матрица Ω из (2) содержит конечное число диагоналных блоков размера 2).*
- (a_2) *Для типа A2, $\mathbf{X}$ обладает открытой $\mathbf{K}$-орбитой (эквивалентно, замкнутой $\mathbf{G}^0$-орбитой),если и только если для всех $\ell \gg 1$ элементы $\sigma(2\ell-1), \sigma(2\ell)$ — последовательные в A, и число $|\{k < 2\ell - 1 : \sigma(k) \prec \sigma(2\ell-1)\}|$ — чётное.*
- (a'_{12}) *Для типов A1 и A2, $\mathbf{X}$ имеет не более одной замкнутой $\mathbf{K}$-орбиты (эквивалентно,не более одной открытой $\mathbf{G}^0$-орбиты). $\mathbf{X}$ имеет замкнутую $\mathbf{K}$-орбиту (эквивалентно, открытую $\mathbf{G}^0$-орбиту), если и только если $\mathbf{X}$ содержит ω-изотропные обобщённые флаги. Это последнее условие эквивалентно существованию инволютивного автоморфизма упорядоченных множеств $\iota_A : (A, \prec) \to (A, \prec)$ такого, что $\iota_A \sigma(\ell) = \sigma\iota(\ell)$ для всех $\ell \gg 1$.*
- (a_3) *Для типа A3, $\mathbf{X}$ имеет всегда беконечно много замкнутых $\mathbf{K}$-орбит (эквивалентно, бесконечно много $\mathbf{G}^0$-орбит). $\mathbf{X}$ обладает открытой $\mathbf{K}$-орбитой (эквивалентно, замкнутой $\mathbf{G}^0$-орбитой), если и только если $d := \min\{|N_+|, |N_-|\} < \infty$ и $\mathcal{F}_\sigma$ содержит подпространства размерности d и коразмерности d.*
- (bcd) *Для типов B,C,D, $\mathbf{X}$ имеет всегда бесконечно много замкнутых $\mathbf{K}$-орбит (эквивалентно, бесконечно много открытых $\mathbf{G}^0$-орбит). Для типов C1 и D3, $\mathbf{X}$ не имеет открытых $\mathbf{K}$-орбит (эквивалентно, не содержит замкнутых $\mathbf{G}^0$-орбит). Для типов BD1 и C2, $\mathbf{X}$ имеет открытую $\mathbf{K}$-орбиту (соответственно, замкнутую $\mathbf{G}^0$-орбиту), если и только если $d := \min\{|N_+|, |N_-|\} < \infty$ и $\mathcal{F}_\sigma$ имеет подпространство размерности d (эквивалентно, содержит подпространства коразмерности d).*

Доказательство. Утверждения следуют из замечаний 4 и 5, предложений 7, 8, 9 и равенств (39), (42), (43). □

Следствие 5. *Единственный случай, в котором $\mathbf{X}$ имеет одновременно открытые и замкнутые $\mathbf{K}$-орбиты (эквивалентно, открытые и замкнутые $\mathbf{G}^0$-орбиты), это типы A3, BD1, C2 когда $d := \min\{|N_+|, |N_-|\} < \infty$ и $\mathcal{F}_\sigma$ содержит подпространства размерности d и коразмерности d.*

Список обозначений

§1: $\mathbb{N}^*$, $|A|$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_\infty$, $(k;\ell)$

§2.1: $\mathbf{G}(E)$, $\mathbf{G}(E,\omega)$, Ω, ω, γ, Φ, ϕ, δ

§2.2: $\mathcal{F}(v_1, \ldots, v_n)$, $\mathbb{O}_w$

§2.3: $\mathcal{F}_\sigma(\underline{v})$, $\mathcal{F}_\sigma$, $\mathbf{P}_\mathcal{F}$, $\mathbf{B}_\mathcal{F}$, $\mathbf{X}(\mathcal{F}, E)$, $(\mathbb{O}_{\tau,\sigma})_w$, $\mathbf{X}_\omega(\mathcal{F}, E)$

§3.1: $\mathcal{F}^\perp$, $\gamma(\mathcal{F})$, $\mathfrak{I}_n$, $\mathfrak{I}'_n$, $\mathcal{O}_w$, $\mathfrak{O}_w$

§3.2: $\delta(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}^\dagger$, $\varsigma(\phi : \mathcal{F})$, $\varsigma(\delta : \mathcal{F})$, $\varsigma(w, \varepsilon)$, $\mathfrak{I}_n(p, q)$, $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}$, $\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}$

§3.3: $\mathfrak{I}_n^{\eta,\epsilon}(p, q)$, $\mathcal{O}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon}$, $\mathfrak{O}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon}$

§4.1: ι, $\mathfrak{I}_\infty(\iota)$, $\mathfrak{I}'_\infty(\iota)$, $\boldsymbol{\mathcal{O}}_w$, $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_w$, $(A^*, \prec^*)$, $\sigma^\perp$, $\mathbf{X}^\perp$, $\mathbf{X}^\gamma$, $\mathbb{O}_w^\perp$, $\mathbb{O}_w^\gamma$

§4.2: $\mathfrak{I}_\infty(N_+, N_-)$, $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)}$, $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)}$, $\sigma^\dagger$, $\mathbf{X}^\dagger$, $\mathbb{O}_w$, $\mathbb{O}_w^\dagger$

§4.3: $\mathfrak{I}_\infty^{\eta,\epsilon}(N_+, N_-)$, $\boldsymbol{\mathcal{O}}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon}$, $\boldsymbol{\mathfrak{O}}_{(w,\varepsilon)}^{\eta,\epsilon}$

Список литературы

[1] A. A. Baranov: Finitary simple Lie algebras. J. Algebra **219** (1999), 299–329.

[2] M. Berger: Les espaces symétriques non compacts. Ann. Sci. École Norm. Sup. **74** (1957) 85–177.

[3] M. Brion and G. Helminck: On orbit closures of symmetric subgroups in flag varities. Canad. J. Math. **52** (2000), 265–292.

[4] I. Dimitrov and I. Penkov: Ind-varieties of generalized flags as homogeneous spaces for classical ind-groups. Int. Math. Res. Not. **2004** (2004), 2935–2953.

[5] L. Fresse and I. Penkov: Schubert decompositions for ind-varieties of generalized flags. Asian J. Math., to appear.

[6] S. Gindikin and T. Matsuki: Stein extensions of Riemannian symmetric spaces and dualities of orbits on flag manifolds. Transform. Groups **8** (2003), 333–376.

[7] G. Fels, A. Huckleberry, and J. A. Wolf: Cycle spaces of flag domains. A complex geometric viewpoint. Progr. Math., vol. 245, Birkhäuser, Boston, MA, 2006.

[8] M. V. Ignatyev and I. Penkov: Ind-varieties of generalized flags: a survey of results. Preprint (2016).

[9] M. V. Ignatyev, I. Penkov, and J. A. Wolf: Real group orbits on flag ind-varieties of $\mathrm{SL}(\infty, \mathbb{C})$. In: Lie Theory and Its Applications in Physics, pp. 111–135. Springer Proc. Math. Stat., vol. 191, Springer, Singapore, 2016.

[10] J. C. Jantzen: Nilpotent orbits in representation theory. Lie theory, 1–211, Progr. Math., vol. 228, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[11] T. Matsuki: The orbits of affine symetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. J. Math. Soc. Japan. **31** (1979) 331–357.

[12] T. Matsuki: Closure relations for orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups. Intersections of associated orbits. Hiroshima Math. J. **18** (1988) 59–67.

[13] T. Matsuki and T. Oshima: Embeddings of discrete series into principal series. In: The orbit method in representation theory (Copenhagen, 1988), pp. 147–175. Progr. Math., vol. 82, Birkhäuser, Boston, MA, 1990.

[14] K. Nishiyama: Enhanced orbit embedding. Comment. Math. Univ. St. Pauli **63** (2014), 223–232.

[15] A. L. Onishchik and È. B. Vinberg: Lie groups and algebraic groups. Translated from the Russian and with a preface by D. A. Leites. Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[16] T. Ohta: The closures of nilpotent orbits in the classical symmetric pairs and their singularities. Tohoku Math. J. **43** (1991), 161–211.

[17] T. Ohta: An inclusion between sets of orbits and surjectivity of the restriction map of rings of invariants. Hokkaido Math. J. **37** (2008), 437–454.

[18] R. W. Richardson and T. A. Springer: The Bruhat order on symmetric varieties. Geom. Dedicata **35** (1990), 389–436.

[19] J. A. Wolf: The action of a real semisimple Lie group on a complex flag manifold. I: Orbit structure and holomorphic arc components. Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 1121–1237.

[20] J. A. Wolf: Cycle spaces of infinite dimensional flag domains. Annals of Global Analysis and Geometry **50** (2016), 315–346.

[21] A. Yamamoto: Orbits in the flag variety and images of the moment map for classical groups I. Represent. Theory **1** (1997), 329–404.

Университет Лотарингии, Нац. Центр Научн. Иссл., Лотарингский Институт им. Эли Картана, Объед. Иссл. Подраздел. 7502, Вандёвр в Нанси, F-54506 Франция

E-mail address: `lucas.fresse@univ-lorraine.fr`

Университет Якобса в Бремене, Кампус Ринг 1, 28759 Бремен, Германия

E-mail address: `i.penkov@jacobs-university.de`