Супералгебри на Ли от Тип Q: Представяния и Комбинаторика

Димитър Грънчаров

29 Юли, 2013

Честит юбилей, Василе!

Супералгебрата на Ли $\mathfrak{q}(n)$

Основното поле ще е $\mathbb{C}$.

Дефиниция

Странната супералгебра на Ли $\mathfrak{q}(n)$ е вторият супер-аналог на алгебрата на Ли $\mathfrak{gl}_n$:

$$\mathfrak{q}(n) := \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & B \\ B & A \end{array} \right) \,\middle|\, A, B \in \mathfrak{gl}_n \right\},$$

където

$$\mathfrak{q}(n)_{\bar{0}} := \left\{ \left(\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & A \end{array} \right) \right\}, \quad \mathfrak{q}(n)_{\bar{1}} := \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & B \\ B & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

Странната супералгебра може да се дефинира и инвариантно:

$$\mathfrak{q}(n) = \{ f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n|n}) \mid fP = Pf \},$$

P е нечетен автоморфизъм на $\mathbb{C}^{n|n}$, за който $P^2 = \mathrm{Id}$.

Картанови подалгебри и представяния на $\mathfrak{gl}_n$ и $\mathfrak{q}(n)$

- От сега нататък фиксираме $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{h}_{\bar{1}}$ да бъде стандартната Картанова подалгебра на $\mathfrak{q}(n)$, т.е. $\mathfrak{h}$ се състои от матриците $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$, където A и B са диагонални.
- теглата на $\mathfrak{q}(n)$: елементи на $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$
- $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$: стнадартния базис (база) на $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$
- кореневата система Δ на $(\mathfrak{q}(n), \mathfrak{h}_{\bar{0}})$: същата като кореневата система на $(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{h}_{\bar{0}})$, с разликата, че всяко корнево пространство $\mathfrak{q}(n)^\alpha$, $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ има (супер-)размерност $(1|1)$. Нека $\overline{\varepsilon_i - \varepsilon_j} := \varepsilon_i + \varepsilon_j$.

Дефиниция

Нека λ е тегло и α е корен на $\mathfrak{q}(n)$. Теглото λ се нарича *α-атипично тегло* ако $(\lambda, \overline{\alpha}) = 0$.

Старши теглови модули на $\mathfrak{q}(n)$

С $\mathfrak{b}_+$ ще означаваме стандартната Борелева подалгебра на $\mathfrak{q}(n)$.

$$\Lambda_{\bar{0}}^+ := \{\lambda_1\epsilon_1 + \cdots + \lambda_n\epsilon_n \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^* \mid \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ {}^\forall i \in I\}$$

$$\Lambda^+ := \{\lambda_1\epsilon_1 + \cdots + \lambda_n\epsilon_n \in \Lambda_{\bar{0}}^+ \mid \lambda_i = \lambda_{i+1} \Rightarrow \lambda_i = \lambda_{i+1} = 0 \ {}^\forall i \in I\}$$

Теорема (Penkov, 1986)

1. Всеки неприводим крайномерен модул $\mathbf{v}$ на $\mathfrak{b}_+$ е модул на Клифорд. По-конкретно: съществува тегло λ, за което $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\lambda)$ има структура на модул над $\mathrm{Cliff}(\mathfrak{h}_{\bar{1}}, F_\lambda)$, където $F_\lambda(u, v) := \lambda([u, v])$.
2. Модулът $U(\mathfrak{q}(n)) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} \mathbf{v}(\lambda)$ има единствен максимален подмодул и единствен неприводим фактор-модул $L(\lambda)$.
3. $L(\lambda)$ е крайномерен тогава и само тогава, когато $\lambda \in \Lambda^+$.

Някои важни резултати от теорията на представянията на $\mathfrak{q}(n)$:

1. Класическата дуалност на Шур-Вайл описваща разлагането на $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ като модул над $\mathfrak{gl}(n)$ и S_k има красив $\mathfrak{q}(n)$-аналог - т.н. дуалност на Сергеев (1984). По-конкретно, $\mathrm{Cliff}_k \rtimes \mathbb{C}[S_k]$ и $U(\mathfrak{q}(n))$ са взаимни централизатори в алгебрата $\mathrm{End}((\mathbb{C}^{n|n})^{\otimes k})$. Квантова версия на дуалността на Сергеев е доказана от Олшански (1990)
2. Формули за характерите на крайномерните $L(\lambda)$ са доказани от Пенков и Серганова (1997) с помощта на супергеометрична версия на Теоремата на Борел-Веи-Бот.
3. Бръндан (2004) доказа наново формулите на Пенков-Серганова използвайки комбинаторни методи (кристални базиси) и направи хипотеза за формули на характерите за произволни $L(\lambda)$.
4. Критерии за простота на различни старши модули на $\mathfrak{q}(n)$ са доказани от Горелик (2006) използвайки детерминанти на Шаповалов.

Теглови модули на $\mathfrak{q}(n)$

Дефиниция

1. Модул M на $\mathfrak{q}(n)$ се нарича *теглови модул* ако
   - $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*} M^\lambda$, където
     $M^\lambda := \{m \in M \mid h \cdot m = \lambda(h)m, \text{ за всяко } h \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}\}$ е
     λ-*тегловото пространство*.
   - $\dim M^\lambda < \infty$
2. M is *ограничен* ако съществува C, за което $\dim M^\lambda < C$ за всякоλ
3. M е *къспидален* ако всеки четен корневи вектор на $\mathfrak{q}(n)$ действа инективно (и следователно, сюрективно) на M (в частност, съществува C, такова че $\dim M^\lambda = C$, когато $M^\lambda \neq 0$).

С помощта на горните дефиниции дефинираме три категории:

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{W}.$$

Класификация на простите теглови модули

От сега нататък $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}(n)$.
Теорема (Dimitrov-Mathieu-Penkov, 2000) Всеки прост теглови модул на $\mathfrak{q}(n)$ е фактор-модул на парболично индуциран къспидален модул S: $M \simeq \left(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} S\right) / M_{+}$.

Теорема (Mathieu, 2000) Всеки прост теглови модул M на $\mathfrak{g}$ е изоморфен на деформирана локализация (twisted localization) на старши теглови модул: $M \simeq \mathcal{D}_{\Gamma}^{\mu} L(\lambda)$, където Γ е множество от комутиращи корени на $\mathfrak{g}$ и μ е тегло. В частност, ако M е къспидален, тогава $L(\lambda)$ е ограничен.

За да класифицираме простите теглови модули на $\mathfrak{g}$ е необходимо и достатъчно да класифицираме простите ограничени старши модули.
Въпрос: За кои λ, простия старши теглови модул $L(\lambda)$ на $\mathfrak{q}(n)$ е ограничен?

Деформирана локализация на теглови модули

Ако α е корен, дефинираме $F_\alpha := \langle f_\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \rangle$, където $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\alpha}$. С $\mathcal{D}_\alpha U$ означаваме локализацията на $U = U(\mathfrak{g})$ спрямо F_α. Ако M е модул на $\mathfrak{g}$-module, полагаме $\mathcal{D}_\alpha M := \mathcal{D}_\alpha U \otimes_U M$; а ако $\Gamma = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ е множество от комутиращи корени (т.е. $[f_{\alpha_i}, f_{\alpha_j}] = 0$), полагаме $\mathcal{D}_\Gamma M := \mathcal{D}_{\alpha_1} ... \mathcal{D}_{\alpha_n} M$.
Дефинираме

$$\Phi_\alpha^x(u) = f_\alpha^x u f_\alpha^{-x} = \sum_{i \geq 0} \binom{x}{i} (\mathrm{ad}\, f_\alpha)^i (u) f_\alpha^{-i},$$

където $u \in \mathcal{D}_\alpha U$ и $x \in \mathbb{C}$.
Ако N е модул на $\mathcal{D}_\alpha U$, с $\Phi_\alpha^x N$ ще означаваме деформирания модул N, след действие на $\mathcal{D}_\alpha U$-автоморфизма Φ_α^x. Полагаме $\mathcal{D}_\alpha^x M := \Phi_\alpha^x \mathcal{D}_\alpha M$.

$$\mathcal{D}_\Gamma^\mu M := \Phi_{\gamma_1}^{x_1} ... \Phi_{\gamma_k}^{x_k} \mathcal{D}_\Gamma M = \Phi_\Gamma^\mu \mathcal{D}_\Gamma M$$

е *деформираната локализация на* M *спрямо* Γ *и* μ.

Ограничени модули на $\mathfrak{gl}_n$

По подразбиране: едно тегло λ е $\mathfrak{gl}_n$-*ограничено* ако $\dot{L}(\lambda)$ е ограничен модул и *ограничено* ако $L(\lambda)$ is ограничен;
$s_i := s_{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}}$.

Теорема (Gorelik, G., 2013)

1. Нека λ и $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ са такива, че $\lambda \not> s_\alpha \cdot \lambda$. Тогава $\dot{L}(s_\alpha \cdot \lambda)$ е подфактор на $\mathcal{D}_\alpha^{(\lambda,\alpha)} \dot{L}(\lambda)$. В частност, ако λ е α–цяло и $\lambda \leq s_\alpha \cdot \lambda$, то $\dot{L}(s_\alpha \cdot \lambda)$ е подфактор на $\mathcal{D}_\alpha \dot{L}(\lambda)$.
2. Нека $\dot{L}(\lambda)$ е крайномерен модул. Освен λ, в орбитата $W \cdot \lambda$ се съдържат $(n-1)^2$ $\mathfrak{gl}_n$-ограничени тегла, които са от вида $(s_k s_{k-1} \dots s_i) \cdot \lambda, (s_k s_{k+1} \dots s_m) \cdot \lambda$, $1 \leq i \leq k \leq m < n$. Подобно описание може да бъде получено и за другите типове тегла (сингулярни и нецели).

Дефиниция Модулите в списъка на (ii) при фксирано k се наричат $\mathfrak{gl}_n$-*ограничени от тип* k.

Смесеното действие (star action)

Definition

Ако α е прост корен и $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$, тогава

$$s_\alpha * \lambda = \begin{cases} s_\alpha \lambda & \text{ако } (\lambda, \overline{\alpha}) \neq 0, \\ s_\alpha \cdot \lambda & \text{ако } (\lambda, \overline{\alpha}) = 0. \end{cases}$$

Групата $\widetilde{W}$ породена от $s_1, \ldots, s_{n-1}$ с отношения $s_i^2 = 1, \ s_i s_j = s_j s_i$ for $i - j > 1$ действа на $\mathfrak{h}_0^*$ с помощта на смесеното действие ($*$-действие).

По подразбиране: Ако пишем $w * \lambda$, ще предполагаме че w е елемент на $\widetilde{W}$. В частност, $s_1 s_2 s_1 * \lambda \neq s_2 s_1 s_2 * \lambda$ в общия случай.

Забележка: По друг начин казано, $L(\lambda)$ е крайномерен тогава и само тогава, когато $\forall i \ \ s_i * \lambda < \lambda$.

Теорема (Gorelik, G., 2013) Нека α е прост корен и λ е тегло, за които $\lambda \not> s_\alpha * \lambda$. Тогава $L(s_\alpha * \lambda)$ е подфактор на $\mathcal{D}_\alpha^{(\lambda,\alpha)} L(\lambda)$. В частност, ако λ е α–цяло и $\lambda \leq s_\alpha * \lambda$, то $L(s_\alpha * \lambda)$ е подфактор на $\mathcal{D}_\alpha L(\lambda)$.

Забележка Ако използваме означението $\lambda \xrightarrow{i} \mu$, когато $\mathcal{D}_\alpha^{(\lambda,\alpha)} L(\lambda)$ има подфактор, който е изоморфен на $L(\mu)$, то тогава може да групираме ограничените модули във фамилии - модулите в една фамилия ще са свързани със стрелки.
Например, в сингулярния случай, ако $\lambda = s_k * \lambda$, то

$$(s_1 ... s_{k-1}) * \lambda \xrightarrow{1} ... \xrightarrow{k-2} s_{k-1} * \lambda \xrightarrow{k-1} \lambda \xleftarrow{k+1} s_{k+1} * \lambda \xleftarrow{k+2} ... \xleftarrow{n-1} (s_{n-1} ... s_{k+1}) * \lambda$$

Ако знаем $\mathfrak{gl}_n$-разлагането на Жордан-Хьолдер на един модул $L(\lambda)$от една фамилия, то тогава можем да намерим $\mathfrak{gl}_n$-разлагането на всички модули от тази фамилия.

Пример Нека $\lambda = \varepsilon_1 - \varepsilon_6 - 2\varepsilon_7 = (1, 0, 0, 0, 0, -1, -2)$ е тегло на $\mathfrak{q}(7)$. Тогава ограничените тегла в $W*$-орбитата на λ (освен λ) са

Тип	Ограничени тегла
1	$s_1 * \lambda,\ (s_1 s_2) * \lambda,\ (s_1 s_2 s_3 s_4 s_5) * \lambda,\ (s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6) * \lambda$
2	$s_2 * \lambda,\ (s_2 s_1) * \lambda, (s_2 s_3 s_4 s_5) * \lambda,\ (s_2 s_3 s_4 s_5 s_6) * \lambda$
3	$s_3 * \lambda,\ (s_3 s_2 s_1) * \lambda, (s_3 s_4 s_5) * \lambda,\ (s_3 s_4 s_5 s_6) * \lambda$
4	$s_4 * \lambda,\ (s_4 s_3 s_2 s_1) * \lambda, (s_4 s_5) * \lambda,\ (s_4 s_5 s_6) * \lambda$
5	$s_5 * \lambda,\ (s_5 s_4) * \lambda, (s_5 s_4 s_3 s_2 s_1) * \lambda,\ (s_5 s_6) * \lambda$
6	$s_6 * \lambda,\ (s_6 s_5 s_4 s_3 s_2 s_1) * \lambda, (s_6 s_5) * \lambda,\ (s_6 s_5 s_4) * \lambda$

Теорема (Gorelik, G., 2013)

1. Едно цяло тегло на $\mathfrak{q}(n)$ е ограничено тогава и само тогава, когато е от следния вид:

$$\lambda, (s_i s_{i+1} \dots s_k) * \lambda, \ (s_m s_{m-1} \dots s_j) * \lambda,$$

където λ е $\widetilde{W}$–максимално цяло тегло, за което $\#\{i | s_i * \lambda = \lambda\} \leq 1$ и индексите i, k, m, j удовлетворяват условия зависещи от $z(\lambda)$ (броя на нулевите компоненти на λ).

2. Ако λ е $\widetilde{W}$–максимално цяло тегло и $(s_k s_{k-1} \dots s_i) * \lambda$ (съответно $(s_k s_{k+1} \dots s_m) * \lambda$) е ограничено тегло, тогава λ е $\mathfrak{gl}_n$-ограничено от тип k. Броят на ограничените тегла от всеки тип е еднакъв: $n-1$ ако $z(\lambda) \leq 2$, $n - z(\lambda) + 1$ ако $z(\lambda) > 3$ за регулярно цяло λ; 1 за сингулярно λ.

Квантовата странна алгебра $U_q(\mathfrak{q}(n))$

Дефиниция Нека $P = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\epsilon_i$. Квантовата странна алгебра $U_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}(n))$ е асоциативната $\mathbb{C}((q))$-алгебра с единица с образуващи $e_i, f_i, e_{\bar{i}}, f_{\bar{i}}$, $(i = 1, ..., n-1)$, $k_{\bar{j}}$, $(j = 1, ..., n)$ и q^h $(h \in P^{\vee})$ и следните отношения.

$$\ldots, e_{\bar{i}} f_{\bar{i}} + f_{\bar{i}} e_{\bar{i}} = \frac{q^{k_i + k_{i+1}} - q^{-k_i - k_{i+1}}}{q - q^{-1}} + (q - q^{-1}) k_{\bar{i}} k_{\overline{i+1}}, \ldots$$

$$e_{\bar{i}}^2 = -\frac{q - q^{-1}}{q + q^{-1}} e_i^2, \;\; f_{\bar{i}}^2 = \frac{q - q^{-1}}{q + q^{-1}} f_i^2.$$

Теорема (G., Jung, Kang, Kim, 2010)

Нека $\mathcal{T}_q$ е категорията състояща се от тензорни модули, т.е. тези крайномери модули M на $U_q(\mathfrak{q}(n))$, които са подмодули на $\mathbf{V}^{\otimes k}$ за някое k, където $\mathbf{V} = \mathbb{C}((q))^{n|n}$ е векторното предтсавяне на $U_q(\mathfrak{q}(n))$. Тогава $\mathcal{T}_q$ е полупроста категория.

Кристални базиси на $\mathcal{T}_q$: дефиниция

Кристален базис на $\mathfrak{gl}_n$–модул M от категорията $\mathcal{T}_q$ е двойка (L, B), където (кристалната решетка) L е свободен $\mathbb{C}[[q]]$-подмодул на M, и B е $\mathbb{C}((q))$–базис на L/qL, за която са в сила няколко условия за съпоставимост между операторите на Кашивара, L и B (B е краен граф).

Ако M е в $\mathcal{T}_q$, четните оператори на Кашивара са дефинирани, както в случая на $\mathfrak{gl}_n$. Новото е, че са налице нечетни оператори на Кашивара на $\mathcal{T}_q$. Три от тях са:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{\bar{1}} &= q^{k_1-1}k_{\bar{1}},\\ \tilde{e}_{\bar{1}} &= -(e_1k_{\bar{1}} - qk_{\bar{1}}e_1)q^{k_1-1},\\ \tilde{f}_{\bar{1}} &= -(k_{\bar{1}}f_1 - qf_1k_{\bar{1}})q^{k_2-1}.\end{aligned}$$

Кристален базис на $\mathfrak{q}(n)$–модул M е тройка $(L, B, (l_b)_{b\in B})$, състояща се от: кристалната решетка L, която е свободен $\mathbb{C}[[q]]$-подмодул на M; краен $\mathfrak{gl}_n$-кристал; и семейство от векторни пространства $(l_b)_{b\in B}$, за които $L/qL = \bigoplus_{b\in B} l_b$; за която (тройка) за която са в сила няколко условия за съпоставимост.

Кристални базиси в $\mathcal{T}_q$: съществуване и единственост

Пример (Кристалният базис на векторното представяне)
Кристалният базис на $\mathbf{V} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}((q))v_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}((q))v_{\bar{j}}$ се описва по следния начин: $\mathbf{L} := \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}[[q]]v_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}[[q]]v_{\bar{j}}$, $l_j = \mathbb{C}v_j \oplus \mathbb{C}v_{\bar{j}}$, и нека $\mathbf{B}$ е следния кристален граф

$$\begin{tikzcd} \boxed{1} \arrow[r, shift left, "1"] \arrow[r, shift right, dashed, "\bar{1}"'] & \boxed{2} \arrow[r, "2"] & \boxed{3} \arrow[r, "3"] & \cdots \arrow[r, "n-1"] & \boxed{n} \end{tikzcd}$$

Теорема (G., Jung, Kang, Kashiwara, Kim, 2010) Нека M е модул от $\mathcal{T}_q$ със старше тегло λ, за който M^λ е породен от свободен, и инвариантен относно $\tilde{k}_{\bar{1}}$, $\mathbb{C}[[q]]$-подмодул L_λ^0. Тогава съществува единствен кристален базис (L, B, l_B) на M, за който

1. $L_\lambda = L_\lambda^0$ и $B_\lambda = \{b_\lambda\}$,
2. $L_\lambda^0 / qL_\lambda^0 = l_{b_\lambda}$,
3. B е свързан.

Също така, B зависи единствено от λ, т.е. $B = B(\lambda)$.

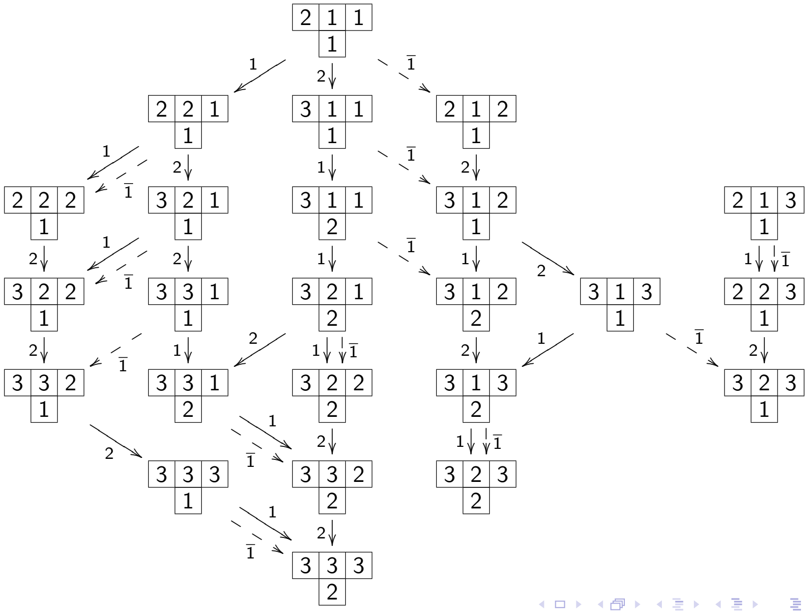
Пример Когато $n = 3$, $\mathfrak{gl}_n$-кристалната структура на $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$ може да се опише по следния начин.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{1} \otimes \boxed{1} \arrow[r, "1"] & \boxed{2} \otimes \boxed{1} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \boxed{3} \otimes \boxed{1} \arrow[d, "1"'] \\
\boxed{1} \otimes \boxed{2} \arrow[d, "2"] & \boxed{2} \otimes \boxed{2} \arrow[r, "2"'] & \boxed{3} \otimes \boxed{2} \arrow[d, "2"] \\
\boxed{1} \otimes \boxed{3} \arrow[r, "1"'] & \boxed{2} \otimes \boxed{3} & \boxed{3} \otimes \boxed{3}
\end{tikzcd}
$$

Пример Когато $n = 3$, $\mathfrak{q}(n)$-кристалната структура на $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$ може да се опише по следния начин.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{1} \otimes \boxed{1} \arrow[r, "1"] \arrow[d, dashed, "\overline{1}"] & \boxed{2} \otimes \boxed{1} \arrow[r, "2"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, dashed, shift left, "\overline{1}"] & \boxed{3} \otimes \boxed{1} \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, dashed, shift left, "\overline{1}"] \\
\boxed{1} \otimes \boxed{2} \arrow[d, "2"] & \boxed{2} \otimes \boxed{2} \arrow[r, "2"'] & \boxed{3} \otimes \boxed{2} \arrow[d, "2"] \\
\boxed{1} \otimes \boxed{3} \arrow[r, dashed, shift left, "\overline{1}"] \arrow[r, shift right, "1"'] & \boxed{2} \otimes \boxed{3} & \boxed{3} \otimes \boxed{3}
\end{tikzcd}
$$

Комбинаторно описание на $B(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ за $\mathfrak{q}(3)$:



Дефиниция *Примкова дума* е дума $u = u_1 \cdots u_N$ от числа, за които $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_k < u_{k+1} < \cdots < u_N$, за някое k.
SSDT (semistandard decomposition tableau) е запълване T на стъпаловидно табло с форма (shape) $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ с елементи от $\{1, 2, \ldots, n\}$, за които

(i) думата v_i определена от прочитането на i-тия ред от ляво на дясно е примкова дума с дължина λ_i,

(ii) v_i е примкова под-дума на $v_{i+1}v_i$ с максимална дължина, за всяко $1 \leq i \leq r-1$, където r е броя на ненулевите λ_i.

(iii) *Схемата на прикачване (insertion scheme)* $T \leftarrow T'$ е дефинирана за всеки две SSDT T и T'.

Теорема (G., Jung, Kang, Kashiwara, Kim, 2011)
(i) Множеството $\mathbf{B}(\lambda)$ състоящо се от всички SSDT с форма λ има структурата на абстрактен $\mathfrak{q}(n)$-кристал изоморфен на $B(\lambda)$, кристалът на неприводимия старши теглови модул $L^q(\lambda)$.
(ii)

$$\mathbf{B}(\lambda) \otimes \mathbf{B}(\mu) \simeq \bigoplus_{\substack{T \in \mathbf{B}(\lambda); \\ T \leftarrow L^\mu = L^\nu \text{за някое } \nu}} \mathbf{B}(\mathrm{sh}(T \leftarrow L^\mu)),$$

където, с L^ν сме означили младши теглови вектор на $\mathbf{B}(\nu)$.

Благодаря за вниманието!

The Lie superalgebra $\mathfrak{q}(n)$

The base field is $\mathbb{C}$.

Definition

The queer Lie superalgebra $\mathfrak{q}(n)$ is the second superanalog of the general linear Lie algebra $\mathfrak{gl}_n$:

$$\mathfrak{q}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \;\middle|\; A, B \in \mathfrak{gl}_n \right\},$$

where

$$\mathfrak{q}(n)_{\bar{0}} := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{q}(n)_{\bar{1}} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alternative (invariant) definition:

$$\mathfrak{q}(n) = \{ f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{n|n}) \mid fP = Pf \},$$

P odd automorphism of $\mathbb{C}^{n|n}$ with $P^2 = \mathrm{Id}$.

Cartan subalgebras and representations of $\mathfrak{gl}_n$ and $\mathfrak{q}(n)$

- Fix the Cartan subalgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{h}_{\bar{1}}$ of $\mathfrak{q}(n)$ to be the standard one: all matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ for which A and B are diagonal.
- weights of $\mathfrak{q}(n)$: elements of $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$
- $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n\}$: the standard basis of $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$
- The root system Δ of $(\mathfrak{q}(n), \mathfrak{h}_{\bar{0}})$: the same as the root system of $(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{h}_{\bar{0}})$, but every root space $\mathfrak{q}(n)^\alpha$, $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ has dimension $(1|1)$. Set $\overline{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \varepsilon_i + \varepsilon_j$.

Definition

Let λ is a weight and α is a root of $\mathfrak{q}(n)$. We say that λ is α-*atypical* if $(\lambda, \overline{\alpha}) = 0$.

Highest weight modules of $\mathfrak{q}(n)$

By $\mathfrak{b}_+$ we denote the standard Borel subalgebra of $\mathfrak{q}(n)$.

$$\Lambda^+_{\bar{0}} := \{\lambda_1\epsilon_1 + \cdots + \lambda_n\epsilon_n \in \mathfrak{h}^*_{\bar{0}} \mid \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ {}^\forall i \in I\}$$

$$\Lambda^+ := \{\lambda_1\epsilon_1 + \cdots + \lambda_n\epsilon_n \in \Lambda^+_{\bar{0}} \mid \lambda_i = \lambda_{i+1} \Rightarrow \lambda_i = \lambda_{i+1} = 0 \ {}^\forall i \in I\}$$

Theorem (Penkov, 1986)

1. *Every irreducible finite-dimensional $\mathfrak{b}_+$-module $\mathbf{v}$ is a Clifford module. Namely, there is a weight λ such that $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\lambda)$ is endowed with a $\mathrm{Cliff}(\mathfrak{h}_{\bar{1}}, F_\lambda)$-modules structure, where $F_\lambda(u, v) := \lambda([u, v])$.*
2. *The module $U(\mathfrak{q}(n)) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} \mathbf{v}(\lambda)$ has unique maximal submodule and unique irreducible quotient $L(\lambda)$.*
3. *$L(\lambda)$ is finite dimensional if and only if $\lambda \in \Lambda^+$.*

Important results for the representation theory of $\mathfrak{q}(n)$ include:

1. The classical Schur-Weyl duality for the decomposition of the $\mathfrak{gl}(n)$-module $(\mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ has a beautiful $\mathfrak{q}(n)$-analog: Sergeev duality (Sergeev, 1984). Namely, $\mathrm{Cliff}_k \rtimes \mathbb{C}[S_k]$ and $U(\mathfrak{q}(n))$ are mutual centralizers in $\mathrm{End}((\mathbb{C}^{n|n})^{\otimes k})$. The quantum version of the Sergeev duality is obtained by Olshanski in 1990.
2. Character formulae for finite dimensional $L(\lambda)$ are established by Penkov and Serganova in 1997 using supergeometric version of the Borel-Weil-Bott Theorem.
3. Brundan reproved the character formulae of Penkov-Serganova in 2004 with different methods and conjectured a formula for arbitrary $L(\lambda)$.
4. Important results related to the simplicity of the highest weight $\mathfrak{q}(n)$–modules were obtained by Gorelik in 2006 using Shapovalov determinant technique.

Weight modules of $\mathfrak{q}(n)$

Definition

1. A representation M of $\mathfrak{q}(n)$ is a *weight module* if
   - $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*} M^\lambda$, where
     $M^\lambda := \{m \in M \mid h \cdot m = \lambda(h)m, \text{ for every } h \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}\}$ is the λ-*weight space*.
   - $\dim M^\lambda < \infty$
2. M is *bounded* if there is C such that $\dim M^\lambda < C$ for every λ
3. M is *cuspidal* if all even root vectors of $\mathfrak{q}(n)$ act injectively on M (hence, there is C such that $\dim M^\lambda = C$ whenever $M^\lambda \neq 0$).

We have three categories:

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{W}.$$

Classification of weight modules

From now on $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}(n)$.

Theorem (Dimitrov-Mathieu-Penkov, 2000)

Every simple weight representation M of $\mathfrak{q}(n)$ is a quotient of a parabolically induced cuspidal representation S:
$M \simeq \left(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} S\right) / M_+$.

Theorem (Mathieu, 2000)

Every simple weight representation M of $\mathfrak{g}$ is a twisted localization of a highest weight representation: $M \simeq \mathcal{D}_\Gamma^\mu L(\lambda)$, for a set of commuting roots Γ and a weight μ. In particular, if M is cuspidal, then $L(\lambda)$ is bounded.

Obvious motivation to study highest weight bounded: the classification of simple weight modules.
Question: For what λ is the the simple highest weight module $L(\lambda)$ of $\mathfrak{q}(n)$ bounded?

Twisted localization of weight modules

For a root α, set $F_\alpha := \langle f_\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \rangle$ where $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\alpha}$. Denote by $\mathcal{D}_\alpha U$ the localization of $U = U(\mathfrak{g})$ relative to F_α. For a $\mathfrak{g}$-module M, set $\mathcal{D}_\alpha M := \mathcal{D}_\alpha U \otimes_U M$ and for a set $\Gamma = \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ of commuting roots (i.e. $[f_{\alpha_i}, f_{\alpha_j}] = 0$), we set $\mathcal{D}_\Gamma M := \mathcal{D}_{\alpha_1} ... \mathcal{D}_{\alpha_n} M$. We define

$$\Phi_\alpha^x(u) = f_\alpha^x u f_\alpha^{-x} = \sum_{i \geq 0} \binom{x}{i} (\mathrm{ad}\, f_\alpha)^i\, (u) f_\alpha^{-i}$$

for $u \in \mathcal{D}_\alpha U$ and $x \in \mathbb{C}$.

For a $\mathcal{D}_\alpha U$-module N, by $\Phi_\alpha^x N$ we denote the module N twisted by the $\mathcal{D}_\alpha U$-automorphism Φ_α^x. We set $\mathcal{D}_\alpha^x M := \Phi_\alpha^x \mathcal{D}_\alpha M$.

$$\mathcal{D}_\Gamma^\mu M := \Phi_{\gamma_1}^{x_1} ... \Phi_{\gamma_k}^{x_k} \mathcal{D}_\Gamma M = \Phi_\Gamma^\mu \mathcal{D}_\Gamma M$$

is the *twisted localization of M relative to Γ and μ.*

Bounded modules of $\mathfrak{gl}_n$

Convention: λ is $\mathfrak{gl}_n$-*bounded* if $\dot{L}(\lambda)$ is bounded and *bounded* if $L(\lambda)$ is bounded; for $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ we set $s_i = s_\alpha$.

Theorem

1. *Let λ and $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ be such that $\lambda \not> s_\alpha \cdot \lambda$. Then $\dot{L}(s_\alpha \cdot \lambda)$ is a subquotient of $\mathcal{D}_\alpha^{(\lambda,\alpha)} \dot{L}(\lambda)$. In particular, if λ is α–integral with $\lambda \leq s_\alpha \cdot \lambda$, then $\dot{L}(s_\alpha \cdot \lambda)$ is a subquotient of $\mathcal{D}_\alpha \dot{L}(\lambda)$.*
2. *Let $\dot{L}(\lambda)$ be finite-dimensional. Apart from λ, the orbit $W \cdot \lambda$ contains $(n-1)^2$ $\mathfrak{gl}_n$-bounded weights which are of the form $(s_k s_{k-1} \dots s_i) \cdot \lambda, (s_k s_{k+1} \dots s_m) \cdot \lambda$, $1 \leq i \leq k \leq m < n$. Similar description can be obtained in the singular and nonintegral case.*

Definition

The modules in (ii) when k is fixed are called $\mathfrak{gl}_n$-*bounded of type* k.

The star action

Definition

If α is a simple root, and $\lambda \in \mathfrak{h}_{\overline{0}}^*$ then

$$s_\alpha * \lambda = \begin{cases} s_\alpha \lambda & \text{if } (\lambda, \overline{\alpha}) \neq 0, \\ s_\alpha \cdot \lambda & \text{if } (\lambda, \overline{\alpha}) = 0. \end{cases}$$

The group $\widetilde{W}$ generated by the symbols $s_1, \ldots, s_{n-1}$ subject to the relations $s_i^2 = 1,\ s_i s_j = s_j s_i$ for $i - j > 1$ acts on $\mathfrak{h}_{\overline{0}}^*$ via the $*$-action.

Convention: When we write $w * \lambda$, w is assumed to be an element in $\widetilde{W}$. In particular, $s_1 s_2 s_1 * \lambda \neq s_2 s_1 s_2 * \lambda$ in general.

Remark: Another way to say that $L(\lambda)$ is finite dimensional: $\forall i \quad s_i * \lambda < \lambda$.

Theorem (Gorelik, G., 2012)

Let α be a simple root and λ be a weight for which $\lambda \not> s_\alpha * \lambda$. Then $L(s_\alpha * \lambda)$ is a subquotient of $\mathcal{D}_\alpha^{(\lambda,\alpha)} L(\lambda)$. In particular, if λ is α–integral with $\lambda \leq s_\alpha * \lambda$, then $L(s_\alpha * \lambda)$ is a subquotient of $\mathcal{D}_\alpha L(\lambda)$.

Remark If we write $\lambda \xrightarrow{i} \mu$ whenever $\mathcal{D}_\alpha^{(\lambda,\alpha)} L(\lambda)$ has a subquotient isomorphic to $L(\mu)$, we we may include bounded modules in families - the modules in one family are connected by arrows. For example, in the singular case, if $\lambda = s_k * \lambda$, then

$$(s_1 \dots s_{k-1}) * \lambda \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{k-2} s_{k-1} * \lambda \xrightarrow{k-1} \lambda \xleftarrow{k+1} s_{k+1} * \lambda \xleftarrow{k+2} \dots \xleftarrow{n-1} (s_{n-1} \dots s_{k+1}) * \lambda$$

If we know a $\mathfrak{gl}_n$-decomposition of a module $L(\lambda)$ is one family, we may find $\mathfrak{gl}_n$-decompositions of all modules in the family.

Example

Let $\lambda = \varepsilon_1 - \varepsilon_6 - 2\varepsilon_7 = (1, 0, 0, 0, 0, -1, -2)$ in $\mathfrak{q}(7)$. Then the bounded weights in the $W*$-orbit of λ (in addition to λ) are

Type	Bounded weights
1	$s_1 * \lambda,\ (s_1 s_2) * \lambda,\ (s_1 s_2 s_3 s_4 s_5) * \lambda,\ (s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6) * \lambda$
2	$s_2 * \lambda,\ (s_2 s_1) * \lambda, (s_2 s_3 s_4 s_5) * \lambda,\ (s_2 s_3 s_4 s_5 s_6) * \lambda$
3	$s_3 * \lambda,\ (s_3 s_2 s_1) * \lambda, (s_3 s_4 s_5) * \lambda,\ (s_3 s_4 s_5 s_6) * \lambda$
4	$s_4 * \lambda,\ (s_4 s_3 s_2 s_1) * \lambda, (s_4 s_5) * \lambda,\ (s_4 s_5 s_6) * \lambda$
5	$s_5 * \lambda,\ (s_5 s_4) * \lambda, (s_5 s_4 s_3 s_2 s_1) * \lambda,\ (s_5 s_6) * \lambda$
6	$s_6 * \lambda,\ (s_6 s_5 s_4 s_3 s_2 s_1) * \lambda, (s_6 s_5) * \lambda,\ (s_6 s_5 s_4) * \lambda$

Theorem (Gorelik, G., 2012)

1. *An integral weight for* $\mathfrak{q}(n)$ *is bounded if and only if it is of the form*

$$\lambda, (s_i s_{i+1} \dots s_k) * \lambda, \; (s_m s_{m-1} \dots s_j) * \lambda,$$

   where λ *is a* $\widetilde{W}$*–maximal integral weight such that* $\#\{i | s_i * \lambda = \lambda\} \leq 1$ *and the indices* i, k, m, j *satisfy conditions depending on* $z(\lambda)$ *(the number of zero coordinates of* λ*).*

2. *If* λ *is a* $\widetilde{W}$*–maximal integral weight and* $(s_k s_{k-1} \dots s_i) * \lambda$ *(resp.,* $(s_k s_{k+1} \dots s_m) * \lambda$*) is a bounded weight, then it is* $\mathfrak{gl}_n$*-bounded of type* k*. We have the same number of bounded weights of each type:* $n-1$ *if* $z(\lambda) \leq 2$*,* $n - z(\lambda) + 1$ *if* $z(\lambda) > 3$ *for regular integral* λ*; 1 for singular* λ*.*

The quantum queer superalgebra $U_q(\mathfrak{q}(n))$

Definition

Let $P = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\epsilon_i$. The quantum queer superalgebra $U_q(\mathfrak{q}(n))$ is the associative algebra with 1 over $\mathbb{C}((q))$ generated by the elements $e_i, f_i, e_{\bar{i}}, f_{\bar{i}}$, $(i = 1, \ldots, n-1)$, $k_{\bar{j}}$, $(j = 1, \ldots, n)$ and q^h $(h \in P^\vee)$ with the following defining relations.

$$\ldots, e_{\bar{i}} f_{\bar{i}} + f_{\bar{i}} e_{\bar{i}} = \frac{q^{k_i + k_{i+1}} - q^{-k_i - k_{i+1}}}{q - q^{-1}} + (q - q^{-1}) k_{\bar{i}} k_{\overline{i+1}}, \ldots$$

$$e_{\bar{i}}^2 = -\frac{q - q^{-1}}{q + q^{-1}} e_i^2, \;\; f_{\bar{i}}^2 = \frac{q - q^{-1}}{q + q^{-1}} f_i^2.$$

Theorem (G., Jung, Kang, Kim, 2010)

Let $\mathcal{T}_q$ be the category of tensor modules, *i.e. all finite dimensional $U_q(\mathfrak{q}(n))$-modules M that are submodules of $\mathbf{V}^{\otimes k}$ for some k, where $\mathbf{V} = \mathbb{C}((q))^{n|n}$ is the vector representation of $U_q(\mathfrak{q}(n))$. Then $\mathcal{T}_q$ is completely reducible.*

Crystal bases in $\mathcal{T}_q$: definition

A crystal basis for a $\mathfrak{gl}_n$–module M in $\mathcal{T}_q$ is a pair (L, B), where the crystal lattice L is a free $\mathbb{C}[[q]]$-submodule of M, and B is a $\mathbb{C}((q))$–basis of L/qL, with a set of compatibility conditions for the action of the Kashiwara operators imposed in addition. (B: a finite graph).

For a module M in $\mathcal{T}_q$, even Kashiwara operators are defined as in the case of $\mathfrak{gl}_n$. In addition we have three odd Kashiwara operators on $\mathcal{T}_q$ by

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{\overline{1}} &= q^{k_1-1}k_{\overline{1}}, \\ \tilde{e}_{\overline{1}} &= -(e_1k_{\overline{1}} - qk_{\overline{1}}e_1)q^{k_1-1}, \\ \tilde{f}_{\overline{1}} &= -(k_{\overline{1}}f_1 - qf_1k_{\overline{1}})q^{k_2-1}. \end{aligned}$$

Definition

A crystal basis for a $\mathfrak{q}(n)$–module M is a triple $(L, B, (l_b)_{b\in B})$, where the crystal lattice L is a free $\mathbb{C}[[q]]$-submodule of M, B is a finite $\mathfrak{gl}_n$-crystal, and $(l_b)_{b\in B}$ is a family of vector spaces such that $L/qL = \bigoplus_{b\in B} l_b$, with a set of compatibility conditions for the action of the Kashiwara operators imposed in addition.

Crystal bases in $\mathcal{T}_q$: existence and uniqueness

Example (The crystal basis of the natural representation)

The crystal basis of $\mathbf{V} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}((q))v_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}((q))v_{\bar{j}}$ can be expressed as follows. Set $\mathbf{L} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}[[q]]v_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}[[q]]v_{\bar{j}}$, $l_j = \mathbb{C}v_j \oplus \mathbb{C}v_{\bar{j}}$, and let $\mathbf{B}$ be the crystal graph given below.

$$\boxed{1} \underset{\bar{1}}{\overset{1}{\rightrightarrows}} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3} \xrightarrow{3} \cdots \xrightarrow{n-1} \boxed{n}$$

Theorem (G., Jung, Kang, Kashiwara, Kim, 2010)

Let M be a module in $\mathcal{T}_q$ with highest weight λ such that M_λ is generated by a free $\mathbb{C}[[q]]$-submodule L_λ^0 invariant under $\tilde{k}_{\bar{i}}$. Then there exists a unique crystal basis (L, B, l_B) of M such that

1. $L_\lambda = L_\lambda^0$ *and* $B_\lambda = \{b_\lambda\}$,
2. $L_\lambda^0 / qL_\lambda^0 = l_{b_\lambda}$,
3. B *is connected.*

Moreover, B depends only on λ. Hence we may write $B = B(\lambda)$.

Example

When $n = 3$, the $\mathfrak{gl}_n$-crystal structure of $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$ is given below.

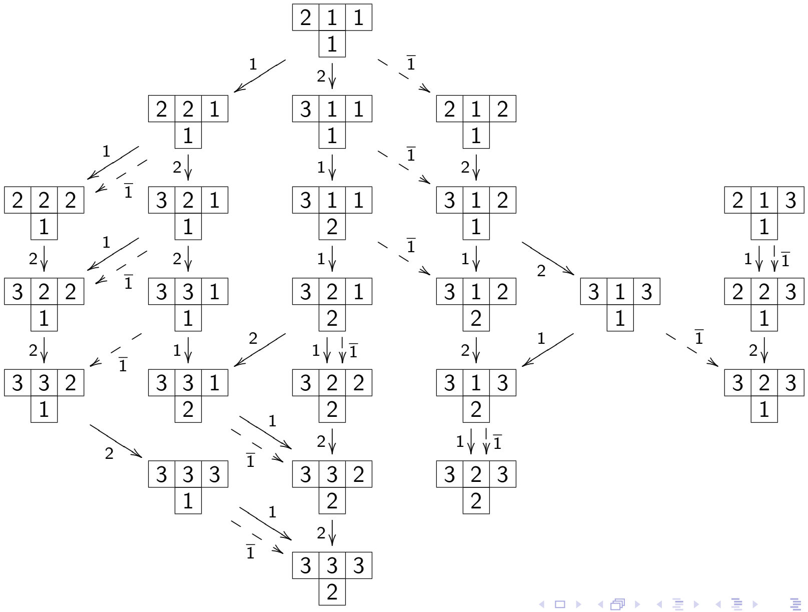
$$
\begin{tikzcd}
\boxed{1} \otimes \boxed{1} \arrow[r, "1"] & \boxed{2} \otimes \boxed{1} \arrow[r, "2"] \arrow[d, "1"'] & \boxed{3} \otimes \boxed{1} \arrow[d, "1"'] \\
\boxed{1} \otimes \boxed{2} \arrow[d, "2"] & \boxed{2} \otimes \boxed{2} \arrow[r, "2"'] & \boxed{3} \otimes \boxed{2} \arrow[d, "2"] \\
\boxed{1} \otimes \boxed{3} \arrow[r, "1"'] & \boxed{2} \otimes \boxed{3} & \boxed{3} \otimes \boxed{3}
\end{tikzcd}
$$

Example

When $n = 3$, the $\mathfrak{q}(n)$-crystal structure of $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$ is given below.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{1} \otimes \boxed{1} \arrow[r, "1"] \arrow[d, dashed, "\bar{1}"] & \boxed{2} \otimes \boxed{1} \arrow[r, "2"] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, dashed, "\bar{1}"] & \boxed{3} \otimes \boxed{1} \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, dashed, "\bar{1}"] \\
\boxed{1} \otimes \boxed{2} \arrow[d, "2"] & \boxed{2} \otimes \boxed{2} \arrow[r, "2"'] & \boxed{3} \otimes \boxed{2} \arrow[d, "2"] \\
\boxed{1} \otimes \boxed{3} \arrow[r, shift left, dashed, "\bar{1}"] \arrow[r, shift right, "1"'] & \boxed{2} \otimes \boxed{3} & \boxed{3} \otimes \boxed{3}
\end{tikzcd}
$$

Combinatorial description of $B(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ for $\mathfrak{q}(3)$:



Definition

A *hook word* is a word $u = u_1 \cdots u_N$ for which $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_k < u_{k+1} < \cdots < u_N$ for some k.

A *semistandard decomposition tableau* is a filling T of a shifted shape $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ with elements of $\{1, 2, \ldots, n\}$ such that

(i) the word v_i formed by reading the i-th row from left to right is a hook word of length λ_i,

(ii) v_i is a hook subword of maximal length in $v_{i+1}v_i$ for $1 \leq i \leq r-1$, where r is the number of nonzero λ_i's.

(iii) The *insertion scheme* $T \leftarrow T'$ is defined for SSDT T and T'.

Theorem (G., Jung, Kang, Kashiwara, Kim, 2011)

(i) The set $\mathbf{B}(\lambda)$ of all SSDT of shape λ has a structure of an abstract $\mathfrak{q}(n)$-crystal and is isomorphic to $B(\lambda)$, the crystal of the irreducible highest weight module $L^{\mathfrak{q}}(\lambda)$.

(ii)

$$\mathbf{B}(\lambda) \otimes \mathbf{B}(\mu) \simeq \bigoplus_{\substack{T \in \mathbf{B}(\lambda); \\ T \leftarrow L^{\mu} = L^{\nu} \text{ for some } \nu}} \mathbf{B}(sh(T \leftarrow L^{\mu})).$$

Here, L^{ν} denotes a unique lowest weight vector in $\mathbf{B}(\nu)$.

THANK YOU